FONCTION DÉRIVÉE ET ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

Exercice 1

Après avoir transformé ses magasins, une chaîne s'intéresse au lancement d'une nouvelle ligne de produits biologiques sur le marché.
Pour faire connaitre ces produits, les dirigeants décident de créer une pochette « découverte » qui sera proposée au prix de 2 €.

On étudie la rentabilité de cette opération sur une journée sachant qu'au maximum 400 pochettes peuvent être fabriquées chaque jour.

1) **Calculer** la recette réalisée dans le cas de :

a) 100 pochettes vendues par jour.
b) 400 pochettes vendues par jour.

2) On note R la recette journalière et n le nombre de pochettes vendues par jour.
Exprimer $R(n)$ en fonction de n.

3) Le coût de fabrication journalier, en euros, de cette pochette est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 400].

a) Dans le repère du fichier cout.ggb, quelques points de la courbe représentative de la fonction f ont été placés, **compléter** le tracé de la courbe.
b) **Donner** l'expression de la fonction f.

4) L'expression de la fonction f est $f(x) = -0{,}01x^2 + 5x + 10$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) **Déterminer** $f'(x)$.
b) **Résoudre** l'inéquation $f'(x) > 0$.
c) **Compléter** le tableau de variations.

x	0 400
Signe de $f'(x)$	
Variation de f	

5) Dans le repère du fichier cout.ggb,

a) **Tracer** la droite d'équation $y = 2x$ sur l'intervalle [0 ; 400].
b) **Donner**, en justifiant votre réponse, le nombre minimum de pochettes qu'il est nécessaire de vendre pour que l'opération soit rentable.

(*D'après sujet de Bac Pro Commerce – Services – Vente Session juin 2010*)

Exercice 2

L'entreprise C.S.I.I. produit des articles du domaine informatique pour l'Europe.
Le coût de production $C(n)$ exprimé en milliers d'euro pour n articles est donné par la fonction C avec : $C(n) = 0{,}02\,n^2 - 2\,n + 98$ pour n appartenant à l'intervalle [50 ; 150].

Le montant des ventes $V(n)$ exprimé en milliers d'euro est pour sa part donné par la fonction V avec $V(n) = 1{,}5\,n$ pour n appartenant à l'intervalle [50 ; 150].

1) **Compléter** le tableau :

n	50	60	75	90	100	125	150
C(n)		50			98		248

2) **Tracer** dans le même repère les courbes représentant les fonctions C et V.

3) **Déterminer** graphiquement l'intervalle des valeurs de n pour lesquelles la production est rentable

4) Le bénéfice $B(n)$ est donné par la fonction B pour n appartenant à l'intervalle [50 ; 150]. **Exprimer** $B(n)$ en fonction de n et **déterminer** la dérivée $B'(n)$. En **déduire** le nombre d'articles à vendre pour que le bénéfice soit maximum.

(*D'après sujet de Bac Pro Comptabilité session juin 2001*)

Exercice 3

Pour contrer l'offensive du commerce sur Internet dans le domaine de la cosmétique, le salon SANTÉ-BEAUTÉ a investi, depuis 4 ans, dans la publicité et l'aménagement de son point de vente. Le responsable du salon a constaté que pour une somme investie s (exprimée en k€), le résultat R réalisé, vérifie la formule $R(s) = -6s^2 + 50s + 12$.

1) **Calculer** le résultat pour une somme investie de 3 k€.

2) Soit la fonction f définie sur l'intervalle [1,5 ; 6] par : $f(x) = -6x^2 + 50x + 12$
a) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [1,5 ; 6]. **Calculer** $f'(x)$.
b) **Résoudre** l'équation $f'(x) = 0$.
c) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f.

x	1,5	6
Signe de $f'(x)$		
Variation de f		

d) En utilisant la calculatrice ou un logiciel, **représenter** graphiquement la fonction f.
e) **Donner** le maximum de la fonction f sur [1,5 ; 6].

3) En utilisant les réponses précédentes, **donner** le montant de l'investissement (en euros) qui permet d'obtenir un résultat maximum

(*D'après sujet de Bac Pro Commerce – Services – Vente Session juin 2007*)

Exercice 4

Le responsable d'un magasin analyse le coût unitaire de gestion de son stock d'imprimantes multifonction. Il estime que ce coût C(n), en euros, est lié au nombre n de commandes, où n est compris entre 5 et 30 par la relation :

$$C(n) = 2n + 40 + \frac{450}{n}$$

A. Calculs des coûts unitaires

Calculer le coût unitaire dans chacun des cas suivants :
1) $n = 15$
2) $n = 25$

B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [5 ; 30] par $f(x) = 2x + 40 + \frac{450}{x}$.

1) **Calculer** $f\,'(x)$ ou $f\,'$ est la dérivée de la fonction f.

2) On admet que $f\,'(x)$ peut s'écrire $f\,'(x) = \frac{2x^2 - 450}{x^2}$.

Pour résoudre l'équation $f\,'(x) = 0$ on est amené à résoudre l'équation $2x^2 - 450 = 0$.
Montrer que cette équation admet pour solution les nombres -15 et 15.

3) **Compléter** le tableau de variation suivant.

x	5	…..	30
Signe de $f\,'(x)$		0	+
Sens de variation de f	↘		

4) À l'aide du logiciel GéoGébra ou des fonctions de la calculatrice :
a) **Compléter** le tableau de valeurs ci-dessous.

x	5	10	12,5	15	18	20	25	30
$f(x)$	140	105	101					115

b) **Tracer** la représentation graphique de la fonction f .
c) **Résoudre** graphiquement l'équation $f(x) = 110$.

C. Exploitation

En utilisant les résultats précédents :

1) **Préciser** le nombre de commandes à passer afin d'obtenir un coût unitaire de gestion du stock minimum.

2) **Préciser** alors le montant de ce coût minimum.

3) **Préciser** les nombres de commandes correspondants à un coût unitaire de gestion du stock égal à 110 €. **Arrondir** par excès.

(D'après sujet de Bac Pro Secrétariat Session juin 2007)

Exercice 5

La société ARTIMON est spécialisée dans la vente, l'entretien et la réparation de bateaux dans la région Ouest. À l'occasion d'un salon nautique, la société a réservé un stand pour présenter ses produits.
L'étude de la fréquentation du stand ARTIMON a permis de réaliser un ajustement du nombre de visiteurs sur une durée de 10 jours, à l'aide de la fonction f définie par:

$$f(x) = -2x^2 + 16x + 150 \qquad \text{pour } x \text{ compris entre 1 et 10}$$

1) On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f. **Déterminer** $f\,'(x)$.
2) **Résoudre** l'équation $f\,'(x) = 0$.
3) Pour quelle valeur de x la fonction f admet-elle un maximum ?
4) **Calculer** la valeur de ce maximum.
5) **Compléter** le tableau de valeurs suivant à l'aide du tableur de GéoGébra.

	1er jour	2ème jour	3ème jour	4ème jour	5ème jour	6ème jour	7ème jour	8ème jour	9ème jour	10ème jour
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	164	174	180			174			132	110

6) **Représenter** graphiquement la fonction f en utilisant le repère de GéoGébra.
7) **Tracer** la droite d'équation $y = 160$.
8) Quel jour le nombre de visiteurs est-il maximal ?
9) **Indiquer** la partie de la courbe qui correspond à une fréquentation journalière de plus de 160 visiteurs.

(*D'après sujet de Bac Pro Commerce – Services – Vente Session juin 2008*)

Exercice 6

Le résultat R d'une entreprise dépend du nombre d'articles vendus n, où n est entier. Pour une vente inférieure à 50 articles le résultat s'exprime, en euros, par la relation :

$$R(n) = -n^3 + 76n^2 - 1\,250\,n - 200$$

1) **Calculer** le résultat réalisé pour :
a) 15 articles vendus ; b) 45 articles vendus.

2) Que pouvez-vous déduire des signes des deux résultats précédents ?

3) On modélise le résultat R par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 50] par :

$$f(x) = -x^3 + 76x^2 - 1\,250x - 200$$

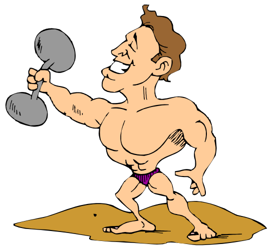
a) À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, **tracer** la courbe représentative de la fonction f.
b) On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f. **Déterminer** $f\,'(x)$.
c) **Résoudre** l'équation $f\,'(x) = 0$. **Arrondir** les solutions à l'unité.

4) Exploitations :
a) **Déduire** de ce qui précède le nombre d'articles vendus correspondant au bénéfice maximal.
b) **Déterminer** le montant du bénéfice maximal.

(*D'après sujet de Bac Pro Comptabilité Session 2008*)

Exercice 7

Le gérant d'une salle de remise en forme vous demande de réaliser une étude permettant de prévoir la rentabilité de son centre en 2015.
En tenant compte du prix d'un abonnement annuel et du coût de fonctionnement du centre, vous devrez estimer le nombre d'abonnements annuels que l'entreprise devra réaliser en 2015 pour être rentable.



Étude de la rentabilité du centre de remise en forme en 2015

Le gérant du centre de remise en forme estime que :
- Pour des raisons de sécurité, le nombre maximum d'abonnements annuels qu'il peut vendre est de 600 ;
- Le prix d'un abonnement annuel est fixé à 320 € en 2015 ;
- Le coût de fonctionnement $C(n)$, en euros, s'exprime, en fonction du nombre n d'abonnements annuels vendus, par la relation : $C(n) = 0{,}06n^2 + 114\,n + 42\,000$

1) a) **Calculer** la recette et le coût de fonctionnement pour 200 abonnements annuels vendus
b) Le centre de remise en forme est-il rentable pour 200 abonnements annuels vendus ? **Justifier** la réponse.
c) On note $R(n)$ la recette réalisée par le gérant pour n abonnements annuels vendus. **Exprimer** $R(n)$ en fonction de n.

Étude d'une fonction.

2) On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0 ; 600] par :

$$f(x) = 0{,}06x^2 + 114x + 42\,000 \text{ et } g(x) = 320x.$$

a) **Déterminer** $f'(x)$ ou f' est la dérivée de la fonction
b) **Donner** le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle [0 ; 600]
c) En **déduire** le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 600]
d) **Tracer** les représentations graphique des fonctions f et g dans un fichier GéoGébra.

Résolution d'une équation et d'une inéquation

3) a) **Résoudre** graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle [0 ; 600].
b) **Montrer** que résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à résoudre :

$$0{,}06\,x^2 - 206x + 42\,000 = 0.$$

c) **Résoudre** cette équation sur l'intervalle [0 ; 600]. **Arrondir** la solution à l'unité
d) À l'aide des représentations graphiques des deux fonctions et du résultat précédent **justifier** que pour x appartenant à l'intervalle [218 ; 600] on a $f(x) \leq g(x)$.

Étude de la rentabilité

En utilisant les résultats précédents, **indiquer** par une phrase, le nombre minimum d'abonnements annuels vendus pour que le centre de remise en forme soit rentable

(*D'après sujet de Bac Pro Secrétariat Session juin 2008*)

Exercice 8

Une municipalité envisage d'ouvrir un terrain de camping d'une capacité d'accueil de 2 000 à 2 500 personnes par jour.
Elle souhaite que le bénéfice moyen, par personne et par jour, soit au moins égal à 3 €.
Elle vous demande de déterminer le nombre minimum de personnes accueillies par jour qui satisfait cette contrainte.

Première partie

On fixe le prix du séjour à 8 euro par jour et par personne.
On estime que le coût de fonctionnement journalier est constitué :

- d'un coût fixe de 1 500 €
- d'un coût variable de 4 € par personne.

1) Dans cette question, on se place dans le cas particulier où l'occupation journalière est de 1 250 personnes.
a) **Calculer** la recette journalière relative au prix du séjour.
b) **Calculer** le coût de fonctionnement journalier.
c) **Calculer** le bénéfice journalier, différence entre la recette journalière et le coût de fonctionnement journalier.
d) En **déduire** le bénéfice journalier moyen, par personne (**arrondir** au centime).

2) Dans la suite, on se place dans le cas général où l'occupation journalière est de n personnes.
a) **Exprimer** la recette journalière $R(n)$ en fonction de n.
b) **Exprimer** le coût de fonctionnement journalier $C(n)$ en fonction de n.
c) En **déduire** le bénéfice journalier $J(n)$ donné par la relation : $J(n) = R(n) - C(n)$
d) **Montrer** que le bénéfice journalier moyen, par personne, peut s'exprimer sous la forme :

$$B(n) = 4 - \frac{1\,500}{n}.$$

Deuxième partie

On considère la fonction f définie pour tout x de l'intervalle [300 ; 2 500] par :

$$f(x) = 4 - \frac{1\,500}{x}$$

1) a) **Calculer** $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.
b) **Déterminer** le signe de $f'(x)$.
c) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f.

x	300	2 500
Signe de $f'(x)$		
Sens de variation de f		

2) **Tracer** la courbe C, représentative de la fonction f sur l'intervalle [300 ; 2 500] à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice.

3) **Tracer** la droite D d'équation $y = 3$ dans le même repère.

4) **Déterminer** graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la courbe *C* et de la droite *D*.

Troisième partie

Indiquer par une phrase le nombre minimum de personnes qui doivent fréquenter le camping chaque jour pour que le bénéfice moyen, par personne et par jour, soit au moins égal à 3 €.

(*D'après sujet de Bac Pro Secrétariat Session 2005*)

Exercice 9

Dans une grande surface, « le caddy moyen » est de 100 euros (dépense moyenne d'un client qui passe à la caisse).
Le montant des charges de cette grande surface en fonction du nombre n de clients est donné par :

$$C(n) = 0,4n^2 - 72n + 4\,800$$

1) a) **Exprimer** le chiffre d'affaire $C_A(n)$ en fonction du nombre de clients n.
b) À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, **tracer** la droite D d'équation $y = 100x$.
Cette droite modélise le chiffre d'affaire C_A.

2) Étude de la fonction f

Soit la fonction f définie par $f(x) = 0,4x^2 - 72x + 4\,800$ sur l'intervalle [0 ; 410].
Sa représentation graphique modélise le montant des charges C.

a) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 410]. **Calculer** $f'(x)$.
b) **Résoudre** l'équation $f'(x) = 0$.
c) **Compléter** le tableau de variation.

x	0 410
Signe de f'	
Variation de f	

d) À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, **construire** la courbe représentative de la fonction f.

3) Interprétation graphique

a) Pour quel nombre de clients les charges sont-elles minimales ?
b) Pour 200 clients le bénéfice est de 13 600 €. **Justifier** graphiquement ce résultat.

(*D'après sujet de Bac Pro Commerce – Services – Vente Session 2006*)

Exercice 10

Madame Dupont, esthéticienne-cosméticienne prépare l'ouverture de son futur salon.
Elle prévoit une réserve à produit, deux cabines de soins et un espace « accueil-vente » d'une superficie voisine de 90 m². Elle hésite entre les deux dispositions représentées sur les figures 1 et 2 ci-dessous.

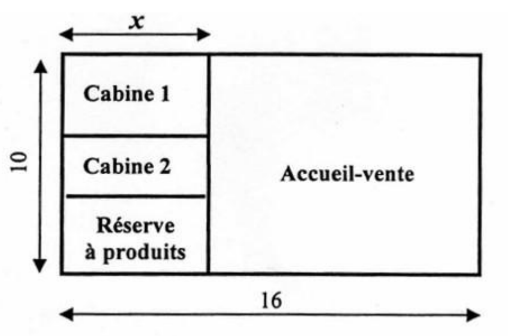


Figure 1 : disposition 1

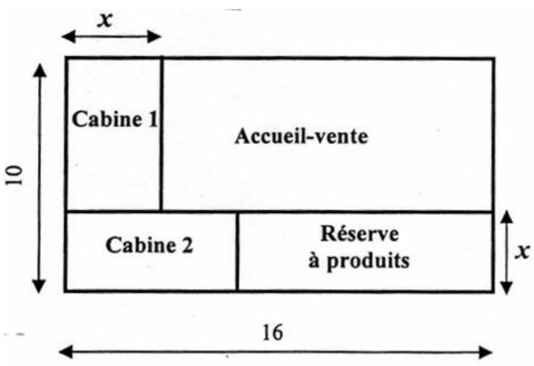


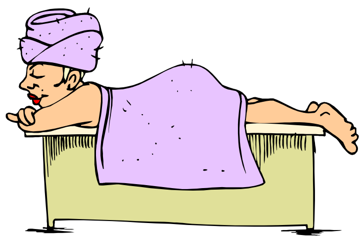
Figure 2 : disposition 2

L'objectif est d'étudier l'aménagement de l'espace du futur salon d'esthétique à ouvrir.

- Partie A : étude de ces deux dispositions

Les figures 1 et 2 ne sont pas à l'échelle. Sur celles-ci, x représente une longueur en mètres.
Les cotes sont en mètre et les aires en m².

A-1. Madame Dupont étudie la disposition 1.



1) Cas particulier : $x = 6$.
Calculer pour la partie «accueil-vente » :
a) son aire,
b) son périmètre.

2) Cas général : x quelconque.
Montrer que pour la partie « accueil-vente », l'aire, en fonction de x, est définie par la relation : $A_1 = - 10\,x + 160$.

A-2. Madame Dupont étudie la disposition 2.

1) Cas particulier : $x = 3$
Calculer pour la partie «accueil-vente » :
a) son aire,
b) son périmètre.

2) Cas général : x quelconque.
Montrer que pour la partie « accueil-vente », l'aire, en fonction de x, est définie par la relation : $A_2 = x^2 - 26\,x + 160$.

- Partie B : étude de deux fonctions numériques

Soient les fonctions f et g, de la variable réelle x, définies sur l'intervalle [2 ; 10] par :

$$f(x) = - 10\,x + 160 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - 26\,x + 160.$$

1) a) **Compléter** le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous.

x	2	10
$f(x)$		

b) **Tracer**, à l'aide de la calculatrice, la droite D représentative de la fonction f.

2) a) **Déterminer** $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
b) **Résoudre** l'inéquation $g'(x) < 0$ sur l'intervalle d'étude [2 ; 10].
c) **Compléter** le tableau de variation de la fonction g ci-dessous.

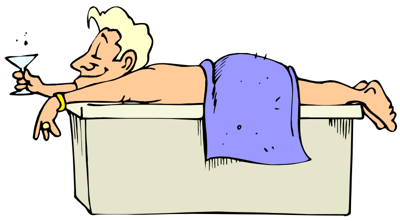
x	2	10
Signe de $g'(x)$		
Variation de la fonction g		

3) **Compléter** le tableau de valeurs de la fonction g ci-dessous.

x	2	3	4	6	7	8	9	10
$g(x)$	112	91		40		16	7	

4) **Tracer** la courbe C représentative de la fonction g en gardant la droite D.

5) **Résoudre** graphiquement les équations :
a) $f(x) = 91$.
b) $g(x) = 91$.



- Partie C : exploitation des résultats précédents

Madame Dupont souhaite choisir la disposition en fonction d'une contrainte (1) liée à l'aire de la partie « accueil - vente » : l'aire de cette partie « accueil - vente » doit être égale à 91 m².

1) **Compléter** les phrases suivantes :

a) Si elle opte pour la disposition 1, x doit prendre la valeur ………..
b) Si elle opte pour la disposition 2, x doit prendre la valeur ………..

2) Parmi les deux dispositions 1 et 2, Madame Dupont décide de s'imposer une nouvelle contrainte (2) : Choisir la disposition qui offre le plus grand périmètre afin de disposer de la plus grande longueur possible pour disposer les vitrines.

Déterminer :

a) Le périmètre P_1 de la partie « accueil – vente » correspondant à la disposition 1 pour la valeur de x trouvée à la question 1) a) de la partie C.
b) Le périmètre P_2 de la partie « accueil – vente » correspondant à la disposition 2 pour la valeur de x trouvée à la question 1) b) de la partie C.
c) La valeur de x, répondant à la nouvelle contrainte (2).
d) La disposition retenue et la valeur de x correspondante. **Rédiger** la réponse.

(*D'après sujet de Bac Pro Esthétique Session juin 2009*)

Exercice 11

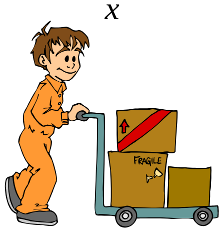
Une entreprise dispose d'un stock de pièces, géré informatiquement. Dès que le stock atteint un minimum, une commande est passée automatiquement au fournisseur de ces pièces.
On note n le nombre de commandes.

- Le coût $C_1(n)$ de passation des commandes est de 120 € par commande.
- Le coût $C_2(n)$ de possession du stock est : $C_2(n) = 450 + \dfrac{4500}{n}$
- Le coût $C(n)$ de gestion du stock est la somme du coût $C_1(n)$ et du coût $C_2(n)$.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le nombre N de commandes à effectuer pour minimiser le coût de gestion du stock.

On considère la fonction h définie sur l'intervalle [2 , 50] par : $h(x) = 450 + \dfrac{4500}{x} + 120x$.

1) **Calculer** $h'(x)$ où h' est la fonction dérivée de la fonction h.



2) **Résoudre** l'équation $h'(x) = 0$. **Arrondir** la solution au centième.

3) **Compléter** le tableau de variation de la fonction h ci-dessous.

x	2 50
Signe de $h'(x)$	
Variation de la fonction h	

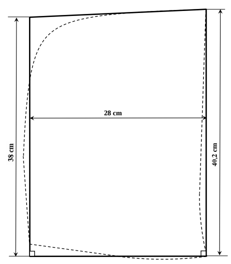
4) En **déduire** le nombre N de commandes à effectuer pour minimiser le coût de gestion du stock et la valeur de ce coût minimum. **Justifier** la réponse.

(*D'après sujet de Bac Pro Groupement C Session juin 2013*)

Exercice 12

On modélise la courbure d'une capuche à l'aide de la fonction f définie sur [0,5 ; 15] par :

$$f(x) = -\frac{6}{x} + 21.$$



1) On désigne par f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

2) En **déduire** le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de la fonction f.

3) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f.

x	0,5 15
Signe de $f'(x)$	
Variation de la fonction f	

4) **Tracer** la courbe C représentative de cette fonction.

(*D'après sujet de Bac Pro Artisanat et métier d'art Session septembre 2008*)