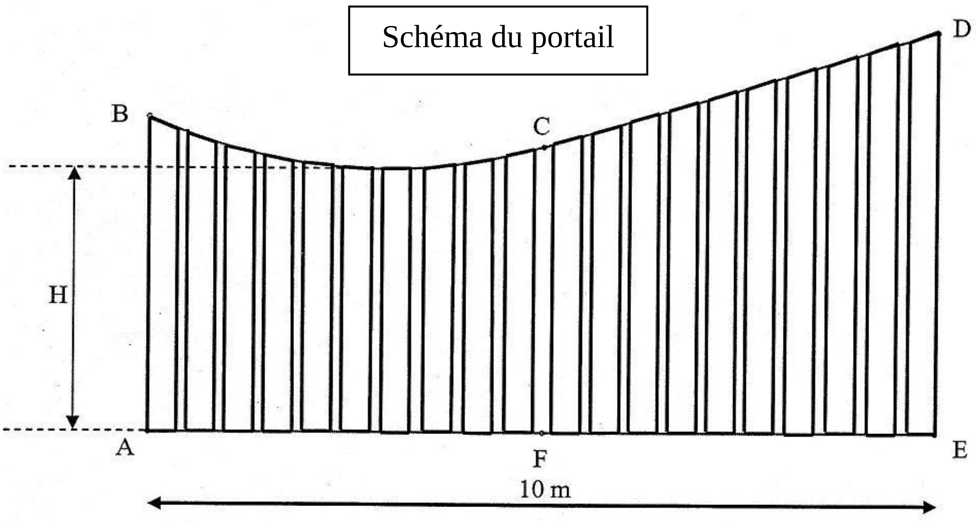
FONCTION DÉRIVÉE ET ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

Exercice 1

Un portail industriel, constitué de lames, est représenté sur le schéma ci dessous :



Sur le schéma, les proportions ne sont pas respectées. On note H la hauteur minimale du portail.

Étude de l'arc $\overset{\frown}{BC}$

1) **Ouvrir** le fichier portail.ggb et **placer** les points B (-5 ; 2,2), C (0 ; 2) et G (-4 ; 2).
Taper Polynôme [B, C, G] dans la zone de saisie.
Dans les propriétés de la courbe, **faire apparaître** son équation.
Noter l'expression de la fonction de type $ax^2 + bx + c$ qui modélise l'arc $\overset{\frown}{BC}$

Dans le repère, l'arc $\overset{\frown}{BC}$ est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 0]$ par $f(x) = 0{,}04x^2 + 0{,}16x + 2$.

2) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. **Calculer** $f'(x)$.

3) **Résoudre** $f'(x) = 0$.

4) Que peut-on en déduire pour la courbe, au point d'abscisse -2 ?

5) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f.

x	-5	0
Signe de $f'(x)$		
Variation de f		

6) **Déduire**, de l'étude précédente, la hauteur minimale du portail, notée H.

Étude de la partie [CD]

On appelle (CD) la droite qui a passe par le point C de coordonnées (0 ; 2) et par le point D de coordonnées (5 ; 2,8).

1) À l'aide de GéoGébra, **placer** le point D puis **tracer** (CD). **Donner** l'équation de (CD).

2) **Justifier** que (CD) est tangente à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ au point C.

(*D'après sujet de Bac Pro MEI Session juin 2010*)

Exercice 2

Après l'ouverture d'une blanchisserie, les masses de draps lavés, en kg, ont été relevées tous les jours. Le tableau ci-dessous présente les relevés effectués les jours pairs (le 2^{e} jour, le 4^{e} jour et ainsi de suite jusqu'au 16^{e} jour).

Jour du relevé	2^{e} jour	4^{e} jour	6^{e} jour	8^{e} jour	10^{e} jour	12^{e} jour	14^{e} jour	16^{e} jour
Rang du jour : xi	2	4	6	8	10	12	14	16
Masse de draps lavés en kg : yi	125	270	340	380	410	450	460	510
Points	A	B	C	D	E	F	G	H

1) **Ouvrir** le logiciel GéoGébra et **placer** les points A, F et H
Taper Polynôme [A, F, H] dans la zone de saisie.
Dans les propriétés de la courbe, **faire apparaître** son équation.
Noter l'expression de la fonction de type $ax^2 + bx + c$ qui modélise l'ajustement.

2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par : $f(x) = -1,25\,x^2 + 50\,x + 30$.

a) **Calculer** $f\,'(x)$ où $f\,'$ est la dérivée de la fonction f.
b) **Résoudre** l'équation : $-2,5\,x + 50 = 0$.
c) On admet que $x = 20$ est la solution de l'équation $f\,'(x) = 0$ sur l'intervalle [0 ; 20].
Compléter le tableau de variation de la fonction f.

x	0	20
Signe de $f\,'(x)$	…	0
Variation de f		

d) **Compléter** le tableau de valeurs de la fonction f.

x	0	4	6	8	12	14	16
$f(x)$		210			450		

e) **Déterminer** la valeur de $f(18)$.

(*D'après sujet de Bac Pro Métiers du Pressing et de la Blanchisserie Session juin 2010*)

Exercice 3

La consommation C d'une voiture à essence sur 100 km s'exprime en fonction de la vitesse v sous la forme :

$$C = 0{,}05v + \frac{80}{v}\text{, avec } v \text{ en km/h et } C \text{ en L.}$$

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [20 ; 150] par : $f(x) = 0{,}05x + \dfrac{80}{x}$.

1) **Montrer** que $f\,'(x) = 0{,}05 - \dfrac{80}{x^2}$ où *f '* désigne la fonction dérivée de la fonction *f*.

2) **Vérifier** que la fonction dérivée *f '* s'annule pour $x = 40$.

3) On admet que *f '*(*x*) est du signe de (*x* – 40) sur l'intervalle [20 ; 150]. **Compléter** le tableau de variation de la fonction *f*.

x	20	40	150
signe de *f '*(*x*)			
variation de *f*			

4) **Tracer** la courbe représentative de la fonction *f* à l'aide de la calculatrice.

5) a) Pour quelle vitesse du véhicule la consommation est-elle minimale ? Quelle est cette consommation minimale ?
b) **Déterminer** graphiquement la vitesse *v* correspondant à une consommation de 6,5 L.

(*D'après sujet de Bac Pro Carrosserie Session juin 2010*)

Exercice 4

On extrude du PSB (polystyrène-polybutadiène appelé aussi polystyrène choc) pour obtenir des profilés dont la section carrée, de 4 cm de côté, est représentée par la figure 1. La partie hachurée représente la matière ; e désigne l'épaisseur du profilé. Les cotes sont en cm.

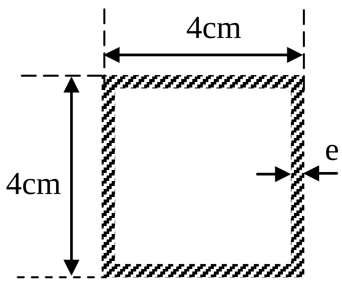
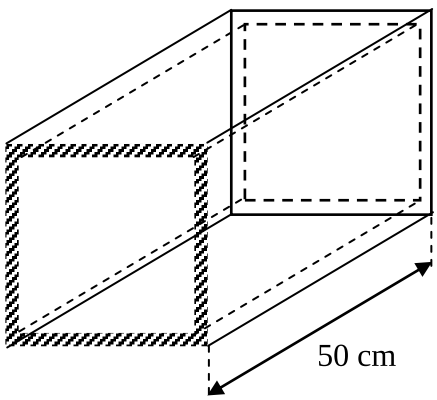


Figure 1.

Section du tube



vue en perspective

Partie A : calcul

1) Pour $e = 0{,}1$ cm.

a) **Calculer**, en cm², l'aire de la partie hachurée.
b) **Calculer**, en cm^3, le volume de matière nécessaire pour réaliser un profilé de longueur 50 cm.
c) **Calculer**, en g, la masse d'un profilé sachant que la masse volumique du PSB est 1,05 g/cm^3.

2) Cas général

a) **Exprimer** l'aire de la partie hachurée en fonction de e.
b) **Montrer** que la masse $m(e)$, en gramme, du profilé en fonction de l'épaisseur e (en cm) s'écrit :

$$m(e) = -210e^2 + 840e$$

Partie B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0,05 ; 2] par $f(x) = -210x^2 + 840x$

1) **Calculer** $f'(x)$ ou $f'(x)$ désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [0,05 ; 2].

2) **Résoudre** l'équation $-420x + 840 = 0$ puis l'inéquation $-420x + 840 > 0$.

3) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,05 ; 2].

x	0,05 2
signe de $f'(x)$	
Variations de f	

4) **Tracer** la représentation graphique de la fonction f à l'aide de la calculatrice.

Partie C : exploitation de la courbe représentative

On rappelle que $m(e) = -210e^2 + 840e$

1) Le cahier des charges prévoit que la masse d'un profilé doit être comprise entre 300 g et 400 g. **Déterminer** graphiquement l'intervalle $[e_1 ; e_2]$ des valeurs possibles de l'épaisseur e.

2) Le bureau d'étude décide de choisir une masse égale à 350 g.

a) Dans ce cas, **donner** une valeur approchée de e par lecture graphique.
b) **Résoudre** l'équation $-210e^2 + 840e = 350$
c) En **déduire** l'épaisseur du profilé correspondant à une masse de 350g.
Arrondir le résultat au centième.

(*D'après sujet de Bac Pro Plasturgie Session juin 2010*)

Exercice 5

Le viaduc de Garabit fut construit par la société Gustave Eiffel entre 1882 et 1884.
Ce pont comporte une arche métallique, de portée 160 m, constituée de 2 arcs de parabole.

Partie 1 : détermination de l'équation de l'arc de parabole supérieur *P*

1) L'équation de la parabole supérieure *P* constituant l'arc du pont s'écrit : $y = a\,x^2 + b\,x + c$.
a) En écrivant que le point O (0 ; 0) appartient à la parabole *P*, **déterminer** le réel c.
b) Pour la suite du problème, on admet que l'équation de la parabole *P* s'écrit : $y = a\,x^2 + b\,x$.
En écrivant que le point A (80 ; 64) appartient à la parabole *P*, **montrer** que : $400\,a + 5\,b = 4$
En écrivant que le point B (160 ; 0) appartient à la parabole *P*, **montrer** que : $160\,a + b = 0$

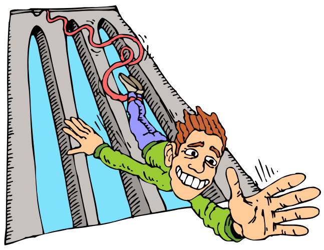
2) **Résoudre** le système : $\begin{cases} 400\,a + 5\,b = 4 \\ 160\,a + b = 0 \end{cases}$

3) En **déduire** l'équation de la parabole *P*.

4) **Placer** les points O (0 ; 0), A (80 ; 64) et B (160 ; 0) dans le repère du fichier viaduc.ggb et **vérifier** l'équation de la parabole.

Partie 2 : étude de fonction
On admet que l'arc de parabole *P* est la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = -0{,}01\,x^2 + 1{,}6\,x \text{ sur } [0 ; 160]$$



1) **Exprimer** $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

2) **Résoudre** l'équation $f'(x) = 0$.

3) **Étudier** le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 160].

4) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f.

x	…	…	…
signe de $f'(x)$			
Variations de f			

Partie 3 : recherche de l'équation de la tangente D à la parabole *P* au point O

Calculer $f'(0)$ et $f(0)$, puis en **déduire** l'équation de la tangente à la courbe *P* en O (0 ; 0), en indiquant les détails du calcul.

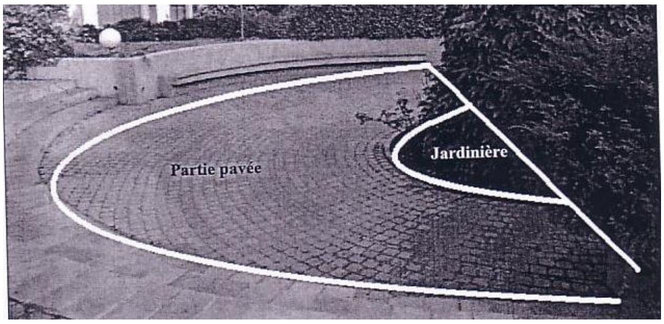
Partie 4 : tracé de la courbe

On admet que l'équation de la tangente D en O s'écrit : $y = 1{,}6\,x$.
Tracer la droite d'équation $y = 1{,}6\,x$ puis la courbe représentative de la fonction f.

(*D'après sujet de Bac Pro Travaux publics Session juin 2010*)

Exercice 6

On désire aménager un espace urbain rectangulaire constitué d'une jardinière et d'une terrasse.
La terrasse se compose de deux parties : une partie pavée et une partie bétonnée.
Le maître d'œuvre s'inspire de la photographie ci-dessous :



1) On souhaite déterminer, à l'aide d'un logiciel, une équation de la courbe constituant le bord de la jardinière. Pour cela, un opérateur réalise les tâches suivantes :

- l'image est scannée, puis placée dans un repère
- trois points (notés A, B et C) sont positionnés sur le contour de la jardinière, puis repérés par leurs coordonnées ;
- les coordonnées des points sont traitées.

Ouvrir le fichier jardiniere.ggb et **placer** 3 point situés sur la bordure de la jardinière.
Taper Polynôme [A, B, C] dans la zone de saisie.
Dans les propriétés de la courbe, **faire apparaître** son équation.
Noter l'expression de la fonction de type $ax^2 + bx + c$ qui modélise la bordure de la jardinière.

y = ...

2) À quoi correspond ce tracé ?
☐ linéaire, ☐ circulaire, ☐ parabolique, ☐ hyperbolique, ☐ autre type.

Cocher la bonne proposition, et **justifier** cette réponse.

3) En plaçant les points A (2 ; 1), B (3 ; 1,5) et C (8 ; 1), on obtient : $y = -0,1\,x^2 + x - 0,6$.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par : $y = -0,1\,x^2 + x - 0,6$

a) $f\,'$ est la fonction dérivée de la fonction f. **Calculer** $f\,'(x)$.
b) **Résoudre** l'équation $f\,'(x) = 0$.
c) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f donné ci-dessous.

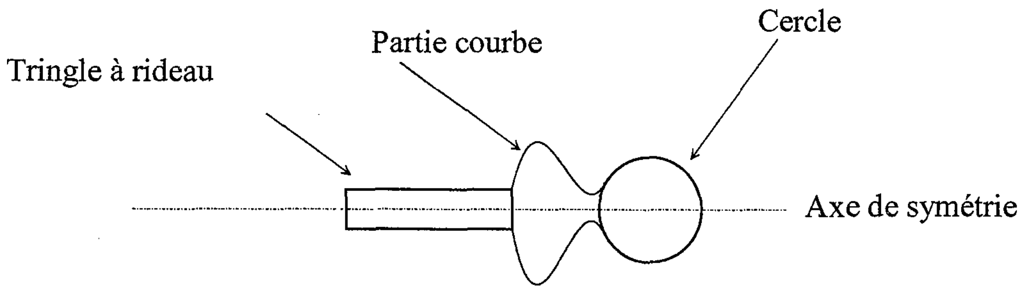
x	0 10
signe de $f'(x)$	
variations de f	

d) **Calculer** $f(5)$.

(*D'après sujet de Bac Pro Réalisation Gros œuvre Session juin 2010*)

Exercice 7

Le schéma ci-dessous représente le profil de l'embout d'une tringle à rideau.



Le profil de l'embout possède un axe de symétrie. Sa partie supérieure est constituée d'une partie courbe et d'un demi-cercle. L'objectif de l'exercice est d'étudier et de tracer avec précision la partie supérieure du profil.

PARTIE A : Détermination de points de la partie courbe ζ

1) Dans le repère du fichier tringle.ggb, **placer** les points de la courbe ζ ayant pour coordonnées :

x	-2	-1,5	0	0,5	1	2
y	0	2,1875	2	0,9375	0	0
Points	C	D	E	F	G	H

Taper Polynôme [C,D,E,F, G, H] dans la zone de saisie.
Dans les propriétés de la courbe, **faire apparaître** son équation.
Noter l'expression de la fonction de type ax^3 + bx^2 + cx + d qui modélise la bordure de la partie courbe.

y = ...

2) La partie courbe est la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 0,5x^2 - 2x + 2 \text{ sur l'intervalle } [-2 ; 2].$$

Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3) **Montrer** que les solutions x_1 et x_2 de l'équation $1,5x^2 - x - 2 = 0$, arrondies au dixième, sont $-0,9$ et $1,5$.

4) On admet que la fonction f présente deux extrema, l'un en x_1, l'autre en x_2.
a) **Calculer** $f(x_1)$ et $f(x_2)$. **Arrondir** au dixième.
b) **Placer** les points de la courbe ζ d'abscisse x_1 et x_2 dans le repère du fichier GéoGébra.

PARTIE B : Étude du point de contact entre la courbe et la partie circulaire.

Le cercle tracé dans le repère donné dans fichier tringle.ggb a pour centre le point A de coordonnées $(4 ; -1)$ et passe par le point de la courbe ζ de coordonnées $(2 ; 0)$, noté B.

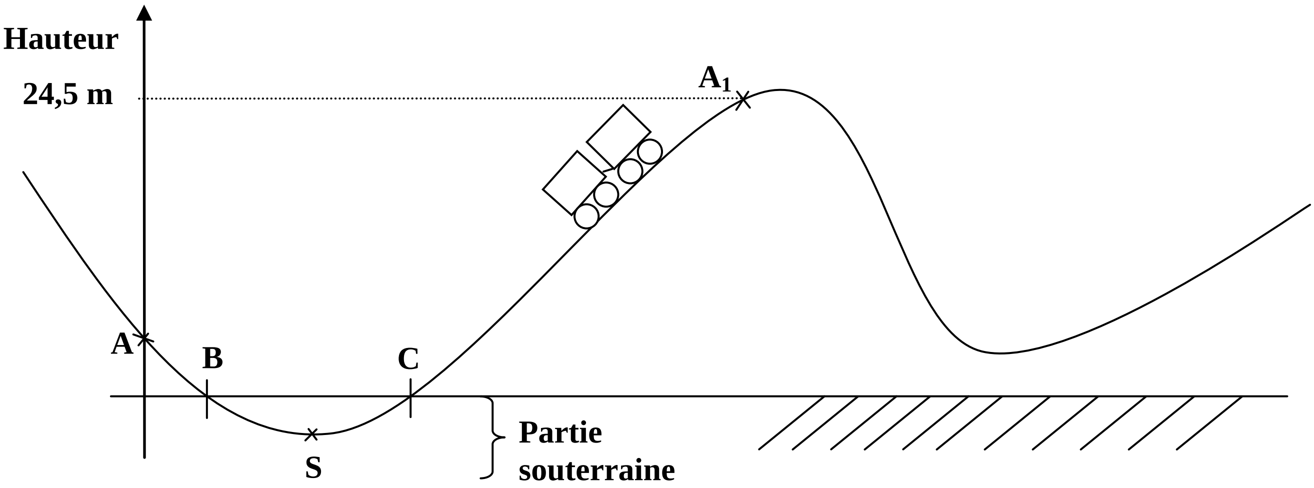
1) a) **Vérifier** que $f'(2) = 2$. On écrira les étapes de la vérification.
b) **Déterminer** une équation de la droite T : tangente à la courbe au point B.
c) **Tracer** la droite T dans le repère du fichier tringle.ggb.

2) a) **Vérifier** qu'une équation de la droite (AB) est : $y = -0{,}5x + 1$.
b) **Montrer** que les droites (AB) et T sont perpendiculaires.
On rappelle que deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.
c) Que peut-on en déduire pour la droite T par rapport au cercle ?

(*D'après sujet de Bac Pro Technicien d'usinage Session juin 2010*)

Exercice 8

Une société est chargée de concevoir un manège utilisant des rails sur lesquels se déplacent des wagonnets.



On s'intéressera au trajet parcouru par les wagonnets entre A et A_1.

Partie A : Recherche de l'équation du profil

Le profil est un arc de parabole passant par les points :

- A de coordonnées (0 ; 0,5),
- S de coordonnées (7 ; -2),
- A_1 de coordonnées (30 ; 24,5).

1) a) À l'aide du logiciel GéoGébra, **montrer** que l'équation de l'arc de la parabole AA_1 s'écrit sous la forme : $y = 0{,}05x^2 – 0{,}7x + 0{,}496875$.
b) **Déterminer** les abscisses des points B et C, intersections de l'arc AA_1 avec l'axe des abscisses.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 30] par : $f(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}7x + 0{,}5$

1) Soit f' la fonction dérivée de f, **calculer** $f'(x)$.

2) À l'aide du tableur du logiciel GéoGébra, **compléter** le tableau des nombres dérivés.

x	5	3	7	15	30
$f'(x)$	-0,2				2,3

3) **Déduire** du tableau précédent, la valeur de x_s pour laquelle $f'(x_s) = 0$.

4) **Compléter** le tableau de variation de la fonction *f*.

x	0 30
Signe de $f'(x)$	
Variation de f	

<u>Partie C</u> : Étude de la partie souterraine

Les wagonnets traversent un tunnel dans la partie souterraine du manège.
Cette partie souterraine correspond à une distance au sol égale à la longueur du segment [BC].

1) **Déterminer** la longueur de [BC].

2) **Déterminer** la profondeur de la partie souterraine.

(*D'après sujet de Bac Pro MSMA Session Septembre 2006*)

<u>Exercice 9</u>

Le mouvement rectiligne alternatif (va et vient) du piston d'une pompe hydraulique haute pression est commandé par le mouvement de rotation d'une came en acier.
Cette came est représentée par le schéma simplifié ci-dessous.
Dans tout cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

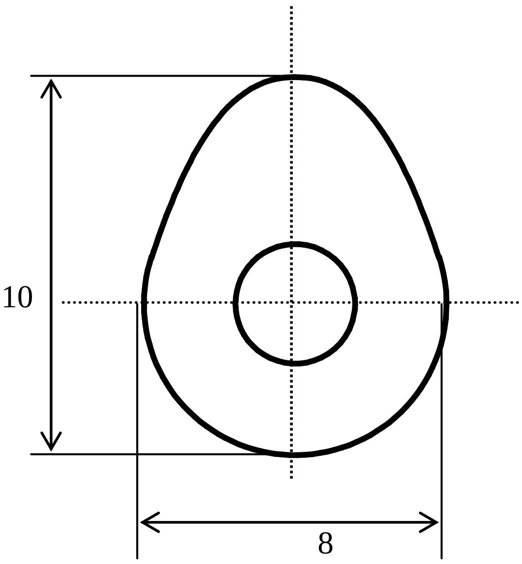


figure 1 : schéma simplifié de la came

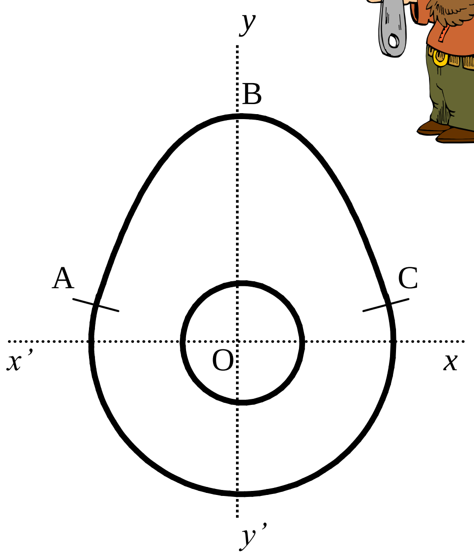


figure 2 : modélisation du profil de la came

Le profil de la came a été utilisé pour programmer son usinage. Cette modélisation est constitué par :
- l'arc de courbe BC
- l'arc de cercle CA de centre O et de rayon 4
- l'arc de courbe AB symétrique de l'arc BC par rapport à l'axe OB

L'objectif est de représenter graphiquement la modélisation dans le plan rapporté au repère figurant dans le fichier came.ggb.

PARTIE A : Étude d'une fonction

Dans le plan rapporté au fichier, l'arc de courbe BC est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 3,8] par $f(x) = -0,04\, x^3 - 0,18\, x^2 + 6$.
Les coordonnées des points B et C sont : B (0 ; 6) et C (3,8 ; 1,2).

1) **Déterminer** $f\,'(x)$ ou $f\,'$ est la fonction dérivée de la fonction f.

2) a) **Résoudre** l'équation $x(-0,12\, x - 0,36) = 0$
b) En **déduire** la solution de l'équation $f\,'(x) = 0$ dans l'intervalle [0 ; 3,8].
c) En **déduire** la valeur du coefficient directeur $f\,'(x)$ de la tangente à l'arc de courbe BC au point B (0 ; 6)
d) **Tracer** cette tangente dans le plan rapporté au repère du fichier came.ggb.

3) a) **Remplir** le tableau de signes suivant.

x	0 3,8
Signe de x	
Signe de $(-0,12x - 0,36)$	
Signe de $x(-0,12x - 0,36)$	

b) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f .

x	0 3,8
Signe de $f\,'(x)$	
Variation de f	

4) **Tracer** la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté au repère du fichier came.ggb.

5) **Compléter** la représentation graphique de la modélisation du profil de la came, dans le plan rapporté au repère du fichier came.ggb, en traçant le cercle, de centre O et de rayon 4.

PARTIE B : Étude de la tangente à l'arc de courbe BC au point C

1) **Montrer** que la valeur arrondie au dixième, du coefficient directeur de la tangente à l'arc de courbe BC au point C (3,8 ; 1,2) est $a = -3,1$.

On rappelle qu'une expression de $f\,'(x)$ est : $f\,'(x) = x(-0,12\, x - 0,36)$

2) L'équation de la tangente à l'arc de courbe BC au point C est de la forme $y = -3,1\, x + b$. **Déterminer**, arrondie à l'unité, la valeur de b en utilisant les coordonnées du point C(3,8 ; 1,2).

3) On admet que l'équation de la tangente à l'arc de courbe BC au point C est $y = -3,1\, x + 13$.
a) **Tracer** cette tangente dans le plan rapporté au repère du fichier came2.ggb**.**
b) **Donner** les coordonnées du point d'intersection de cette tangente et de l'axe des ordonnées.

(*D'après sujet de Bac Pro Microtechniques Session juin 2007*)