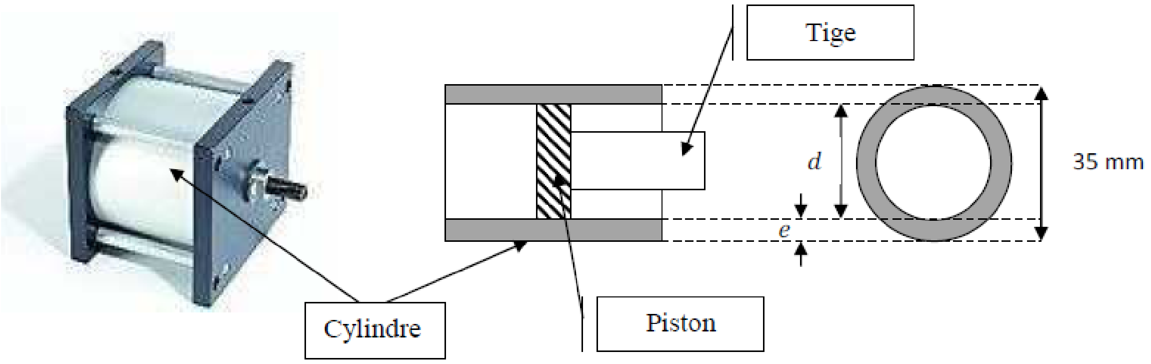
FONCTION DÉRIVÉE ET ÉTUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

Exercice 1

Une société propose une gamme de vérin hydraulique à faible course dont les pressions maximales varient, selon l'alésage du cylindre, entre 160 et 500 bar.
L'objectif de cette étude est de construire un abaque donnant la pression maximale que peut subir le cylindre en fonction de son épaisseur.



Partie 1 : Relation entre la pression maximale pouvant subir le cylindre et l'épaisseur de ce cylindre

Le diamètre extérieur du cylindre vaut 35 mm. On note e l'épaisseur du cylindre, en mm et d son diamètre intérieur, en mm.

1) **Exprimer** d en fonction de e.

2) **Justifier** que $e < 17,5$

3) La pression maximale p, en bar, dans le cylindre du piston s'exprime en fonction de e par la relation :

$$p = \frac{1\,600 \times e}{35 - 2e}$$

Calculer e pour $p = 350$ bar. **Arrondir** au centième.

Partie 2. Étude des variations de la pression maximale en fonction de l'épaisseur

On définit la fonction f sur l'intervalle [1;6] par : $f(x) = \frac{1\,600 \times x}{35 - 2x}$

Soit f' la dérivée de la fonction f ; on admet que $f'(x) = \frac{56\,000}{(35 - 2x)^2}$

1) **Justifier** que sur l'intervalle [1;6], $f'(x)$ est positif.

2) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f ci-après.

x	1	6
Signe de $f\,'(x)$		
Variation de f		

3) **Compléter** le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous. **Arrondir** les valeurs au dixième.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	48,5	103,2			320	417,4

4) **Tracer** la courbe représentative de la fonction f à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.

Partie 3. Exploitation

La courbe obtenue précédemment représente la pression maximale d'utilisation d'un vérin en fonction de son épaisseur.
Une société propose différents modèles de vérin, tous de diamètre extérieur de 35 mm.

				
<u>Modèle A</u> Pression maximale : p_m = 500 bar 200 € HT	<u>Modèle B</u> Pression maximale : p_m = 350 bar 185 € HT	<u>Modèle C</u> Pression maximale : p_m = 250 bar 210 € HT	<u>Modèle D</u> Pression maximale : p_m = 200 bar 150 € HT	<u>Modèle E</u> Pression maximale : p_m = 160 bar 150 € HT

L'épaisseur de chacun de ces modèles a été calculée pour les pressions maximales d'utilisation.

Un client désire acheter 500 vérins pouvant subir chacun une pression maximale de 240 bar. Son choix se porte sur le modèle B.

1) **Justifier** le choix du modèle B.

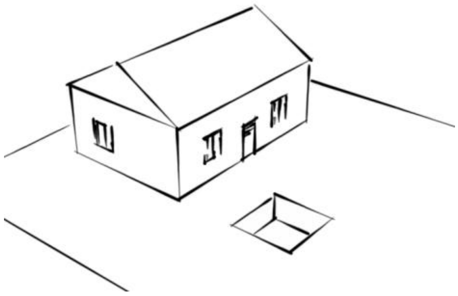
2) Avec la précision permise par la lecture, **déterminer** graphiquement l'épaisseur du cylindre pour une pression maximale de 350 bar.

3) L'opérateur usine une première série de modèle B. La mesure de l'épaisseur d'un cylindre pris au hasard est 5,5 mm. Cette série satisfait-elle les exigences du modèle B ? **Justifier**.

(*D'après sujet de Bac Pro MEI Session juin 2011*)

Exercice 2

Un particulier souhaite installer une cuve de forme parallélépipédique dans le but de récupérer l'eau de pluie. Cette cuve, de profondeur 1,20 m, doit être enterrée à proximité de la maison.
On admet que, pour un volume fixé, la quantité de béton utilisée est minimale lorsque le périmètre intérieur du bord supérieur de la cuve est minimal.
L'étude porte sur la détermination des dimensions de la cuve.



Partie I : Volume de stockage de la cuve.

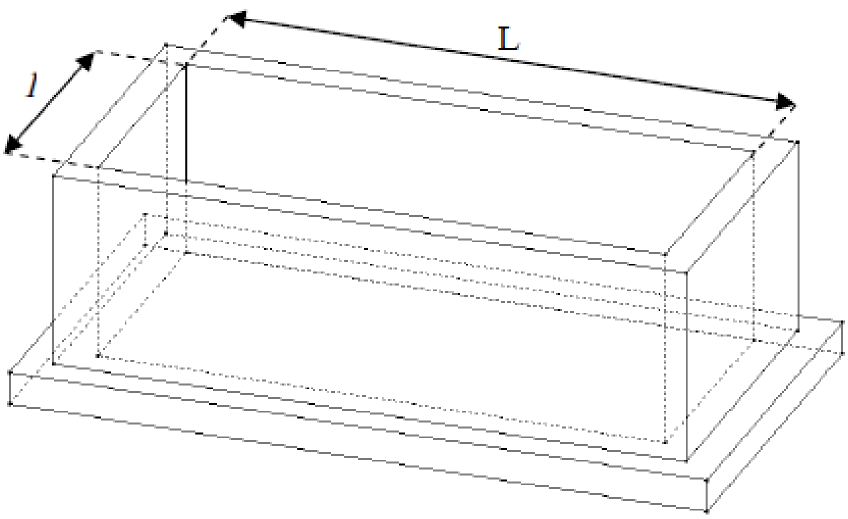
L'eau récupérée sera utilisée pour l'arrosage, le lave-linge et les toilettes. La capacité de la cuve est fixée à 6 m^3.

Utilisations	Volumes à stocker
Arrosage	500 à 1 500 litres
Arrosage ; lave-linge	1 500 à 3 000 litres
Arrosage ; lave-linge ; toilettes	3 000 à 6 000 litres
Arrosage ; lave-linge ; bassin ; toilettes	6 000 à 9 000 litres
Rétention Eau de pluie ; régulation des débits	9 000 litres et plus

En utilisant le tableau ci-dessus, **indiquer** si la capacité de la cuve est suffisante pour l'utilisation prévue.

Partie II : Expression du périmètre de la base

On rappelle que le volume intérieur de la cuve est de 6 m^3 et que la profondeur est fixée à 1,20 m.
On considère le rectangle de longueur *L* et de largeur *l* tel qu'il est représenté sur le schéma ci-dessous.



1) **Montrer** que l'aire A de ce rectangle vaut 5 m^2.

2) **Exprimer**, en fonction de L et l, le périmètre p de ce rectangle.

3) **Exprimer**, en fonction de L et l, l'aire A de ce rectangle.

4) En utilisant les questions 2 et 3, **montrer** que :

$$p = 2 \times \left(\frac{5}{\ell} + \ell \right)$$

Partie III : Étude de la fonction

Soit la fonction f définie sur]0 ; 8] par :

$$f(x) = 2\left(\frac{5}{x} + x \right)$$

1) **Compléter** le tableau de valeurs ci-dessous. **Arrondir** les valeurs au dixième.

x	0,75	1	1,5	2	2,5	3	5	7	8
$f(x)$		12		9	9		12		17,3

2) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, **tracer** l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

3) **Donner**, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée de l'abscisse du point correspondant au minimum de la fonction f.

Pour obtenir un résultat plus précis, on étudie les variations de la fonction.

4) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 8].

a) **Montrer** que : $f'(x) = \dfrac{2(x^2 - 5)}{x^2}$

b) **Résoudre** dans $\mathbb{R}$ l'équation du second degré : $x^2 - 5 = 0$

c) En **déduire** la solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur l'intervalle]0 ; 8].

d) **Étudier** le signe de $f'(x)$ et **compléter** le tableau de variation ci-dessous.

x	0	…	8
Signe de $f'(x)$		0	
Variation de f			

e) En **déduire** la valeur exacte pour laquelle la fonction f atteint son minimum.

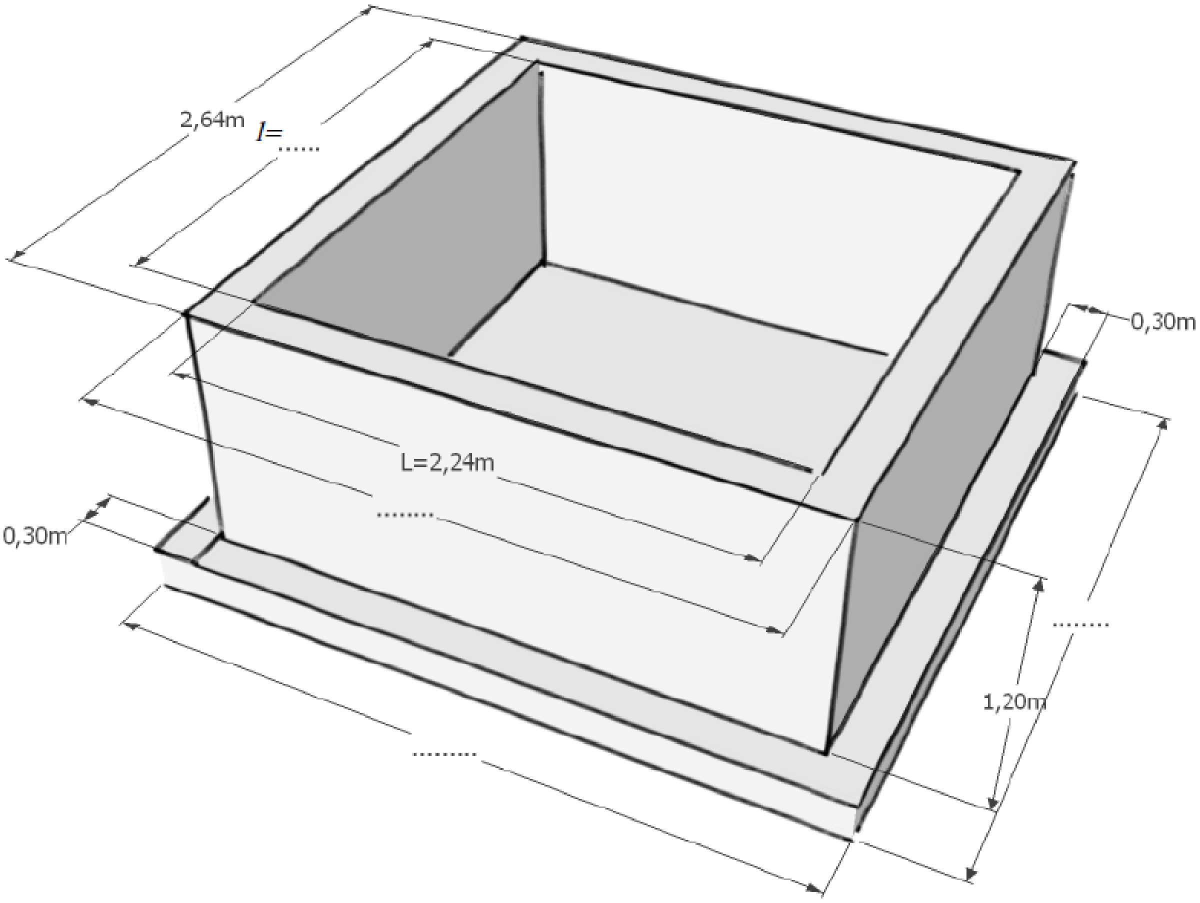
Partie IV : Détermination du volume de béton

Dans cette partie, on va déterminer le volume minimal de béton nécessaire pour construire cette cuve (mur et dalle de soubassement)

1) Pour quelle largeur *l* de la cuve, le périmètre *p* est-il minimal ? **Arrondir** cette valeur au centimètre.

2) On précise que les murs et la dalle de soubassement ont une épaisseur de 20 cm.

a) **Compléter** les cotes manquantes dans le schéma ci-dessous.



b) **Calculer**, en m^3, le volume de béton nécessaire pour construire cette cuve. **Arrondir** la valeur au dixième.

(*D'après sujet de Bac Pro Session Technicien du Bâtiment Session juin 2011*)