APPROCHER UNE COURBE AVEC DES DROITES

Exercice 1

Le coût de fabrication d'une puce pour téléphone portable est donné par la fonction :

$$C(q) = -\ 0{,}01q^2 + 20q + 5\ 000.$$

où C représente le coût en euros et q la quantité de puces produite comprise entre 0 et 1 800.

1) **Calculer** le coût de fabrication en euros

a) pour 500 puces et 501 puces. b) pour 1 500 puces et 1 501 puces.

2) En **déduire** l'augmentation du coût entraîné par la fabrication d'une puce supplémentaire.

a) pour la 501$^{\text{ème}}$ puce b) pour la 1 501$^{\text{ème}}$ puce.

3) a) **Calculer** $C'(500)$ et $C'(1\ 500)$ grâce à la fonction « *nombre dérivé* » de la calculatrice.

b) **Comparer** $C'(500)$ et $C'(1\ 500)$ avec les valeurs trouvées à la question 2.
Calculer la différence entre ces deux valeurs.

Le coût de production d'une unité supplémentaire correspond au coût marginal : **Coût marginal de rang x : $C(x + 1) – C(x)$** Il permet la recherche d'un optimum technique de production pour l'entreprise lorsqu'elle est dans une zone de bénéfice. En économie, on prend souvent : $C(x + 1) – C(x) \approx C'(x)$

Exercice 2

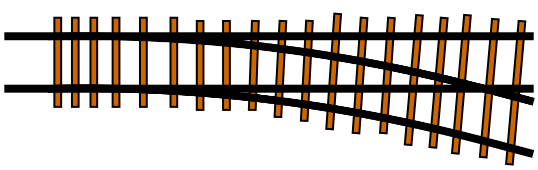
Les tramways électriques du Loir et Cher (TELC) ont construit et exploité un réseau de tramways électriques à voie métrique dans le département du Loir et Cher à partir de 1910 jusqu'en 1934.

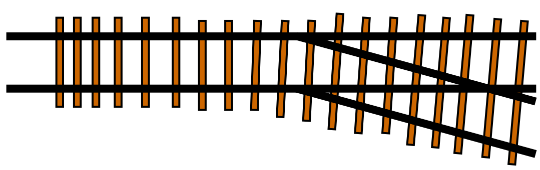
1) **Rechercher** sur internet la signification de « Voie métrique ».

2) **Ouvrir** le fichier GéoGébra aiguillage.

3) Sachant qu'un rail est situé sur l'axe des abscisses du repère gradué en cm, **donner** l'équation de la droite qui porte le rail supérieur puis **tracer** cette droite à l'aide du logiciel.

4) On s'intéresse au raccordement des rails sur un aiguillage.





Expliquer les différences entre les deux aiguillages proposés ci-dessus et pourquoi il n'est pas envisageable de choisir le second modèle.

5) a) À l'aide de GéoGébra, **placer** le point *A* (400 ; 95) et deux autres points *B* et *C* espacés et situés sur le rail courbé supérieur.

b) **Rechercher** la fonction dont la courbe représentative coïncide avec ce rail à l'aide de la commande « *polynôme[A,B,C]* ».

c) **Placer** un quatrième point *D* sur cette courbe puis **tracer** la tangente à la courbe en *D*.

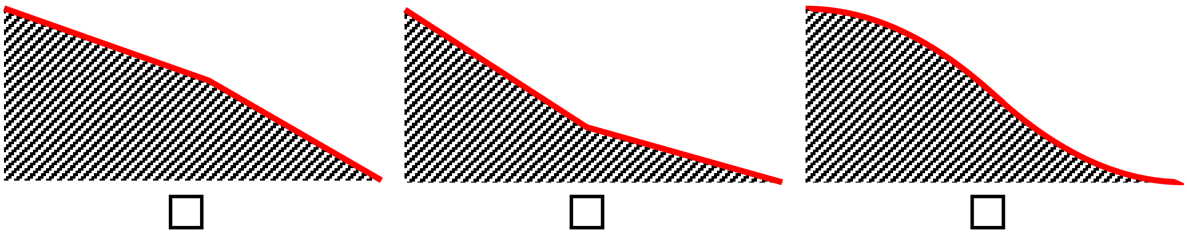
6) a) **Déplacer** *D* pour le situer sur l'embranchement du rail courbé et du rail horizontal.

b) **Formuler** une remarque sur la position de la tangente.

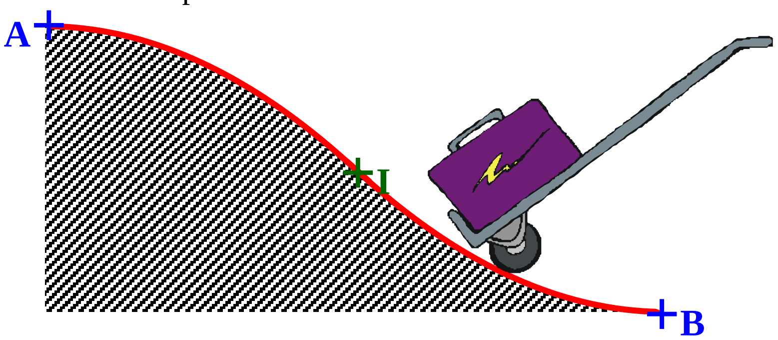
Exercice 3

Pour descendre des bagages d'un quai haut de 1 m, on décide d'aménager une rampe.

1) On propose trois profils pour cette rampe.
Cocher ci-dessous celui qui vous semble le mieux adapté en expliquant votre choix.



2) Le troisième profil est obtenu à partir de deux fonctions.



L'arc de courbe AI est obtenu à partir de la fonction $f(x) = -0{,}5x^2 + 1$ sur [0 ; 1]
L'arc de courbe IB est obtenu à partir de la fonction $g(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$ sur [1 ; 2]

a) **Ouvrir** le fichier GéoGébra quai puis **placer** le point *I* (1 ; 0,5).

b) **Vérifier** que $f(x_I) = g(x_I)$

5) a) À l'aide de la calculatrice, **déterminer** $f'(x_I)$ et $g'(x_I)$.

b) **Comparer** $f'(x_I)$ et $g'(x_I)$.

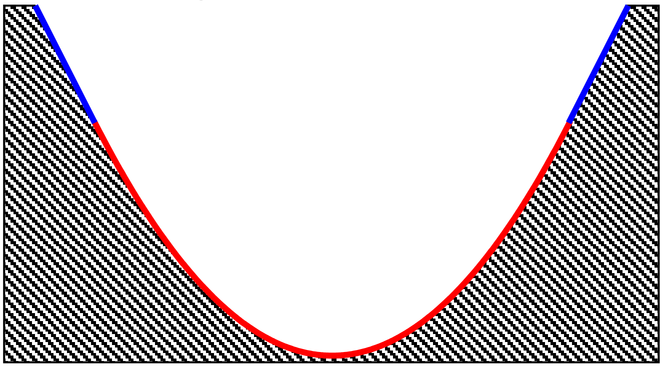
c) **Conclure** sur la qualité du raccordement.

6) a) À l'aide de la calculatrice, **déterminer** $f'(x_A)$ et $g'(x_B)$.

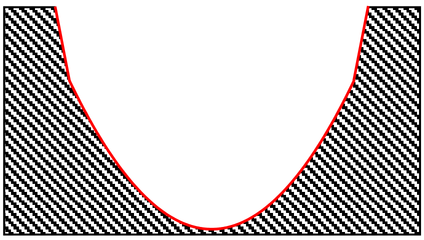
b) **Préciser** si la rampe est tangente au sol et au sol du quai

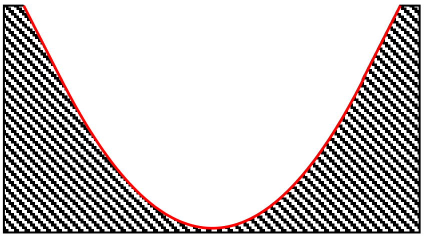
Exercice 4

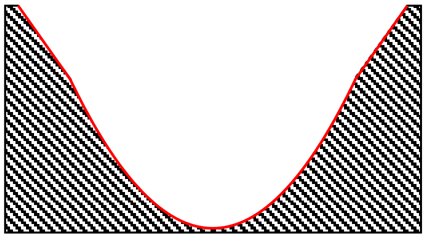
On décide de réaliser un half-pipe. Sa courbure est donnée par :
- un arc de parabole
- deux segments de droites



1) **Cocher** le modèle qui, selon vous, correspond le mieux à la piste.







☐ ☐ ☐

2) À la jonction des parties rectilignes et de la partie arrondie, **indiquer** quelle contrainte devra être respectée.

3) **Ouvrir** le fichier GéoGébra half-pipe.
On considère que chaque axe est gradué en mètres.

La partie arrondie est dessinée à partir de la fonction $f(x) = x^2$.
Tracer la représentation graphique de cette fonction à l'aide du logiciel.

4) On considère que les points de jonction A et B entre les parties rectilignes et la partie arrondie sont situés à une hauteur de 3,24 m du point le plus bas de la piste.

a) **Tracer** la droite d'équation $y = 3{,}24$ afin de placer plus facilement les points A et B.

b) Après avoir placé les points A et B, **donner** leurs coordonnées.

A (– ………. ; ……….) ; B (………. ; ……….)

5) Il est indispensable que les parties rectilignes (définies par une équation du type $y = ax + b$) coupent la partie arrondie (obtenue à partir de la fonction $f(x) = x^2$) en A et en B.

a) En considérant la droite d'équation $y = ax + b$ passant par A, **donner** la valeur de x qui doit être obtenue en résolvant l'équation : $x^2 = ax + b$

b) **Remplacer** x par 1,8 dans l'équation précédente afin d'obtenir une équation à deux inconnues a et b.

c) Avec la calculatrice, **calculer** le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse x = 1,8.

d) En respectant la contrainte décrite à la question 2, préciser ce que représente le nombre dérivé obtenu à la question précédente pour la partie rectiligne jouxtant le point A.

e) En remplaçant ce nombre dérivé dans l'équation obtenue à la question 4) b), on obtient l'équation : 3,24 = 6,48 + b
Résoudre cette équation afin de trouver la valeur de b et **écrire** l'équation de la partie rectiligne jouxtant le point A.

y_A = ………………..

6) **Tracer** les tangentes à la courbe représentative de f aux points A et B puis **afficher** les équations de ces deux tangentes sous la forme $y = ax + b$.

7) **Comparer** l'équation de la tangente en A avec celle obtenue à la question 5) e).

8) On cherche le profil du half-pipe offrant le plus de vitesse.

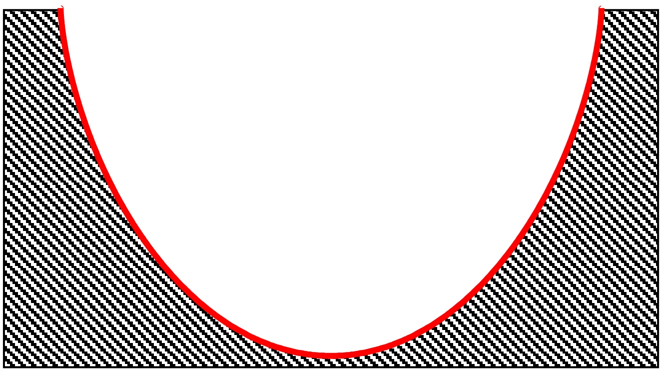
a) **Ouvrir** le fichier brachistochrone-parabole-droite.

b) Dans le fichier on a représenté trois trajectoires (une courbe brachistochrone en bleu, une parabole en rouge et une droite en jaune) pour passer du point le plus haut du half-pipe au point le plus bas.
Déplacer la droite verticale verte. Les points P et B situés respectivement sur la parabole et la courbe brachistochrone se déplacent et les coefficients directeurs des tangentes (ou nombres dérivés) en ces points varient en conséquence.

c) **Comparer** ces deux coefficients directeurs ainsi que celui de la droite jaune pour différentes positions de la droite verte.

d) **Expliquer** pourquoi la trajectoire offrant le plus de vitesse est la courbe brachistochrone et non la parabole ou le plan incliné.

Pour que la rampe d'un half-pipe soit parcourue le plus rapidement possible, il faut que celle-ci ait la forme d'une cycloïde appelé brachistochrone.



Le mot brachistochrone désigne une courbe plane sur laquelle un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant sans frottement et sans vitesse initiale, présente un temps de parcours minimal parmi toutes les courbes joignant deux points fixés.
(http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_brachistochrone)