DEVOIR SUR LES FONCTIONS LOGARITHMIQUES

Soit la fonction définie sur l'intervalle [0,1 ; 2] par :

$$f(x) = \ln x - x + 2$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

Etude de la fonction et courbe représentative

1) Déterminer la dérivée f' de la fonction f. Montrer que sur l'intervalle [0,1 ; 2], $f'(x)$ a le signe de $(1 - x)$.

2) Donner, en utilisant le résultat précédent, le tableau de variation de la fonction f.

3) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-0,4	0,19				

On donnera des valeurs arrondies à 0,01.

4) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.

Résolution numérique approchée d'une équation

La courbe montre que l'équation d'inconnue réelle x, $\ln x - x + 2 = 0$, admet une solution unique sur l'intervalle [0,1 ; 0,2]. On note a cette solution et on se propose de déterminer un encadrement du nombre $\boldsymbol{a}$. Les valeurs approximatives de $f(x)$, données dans le tableau précédent, notamment pour $x = 1$ et pour $x = 0,2$, seront supposées, dans ce qui suit, être les valeurs exactes.

1) On note A le point de la courbe $\mathcal{C}$ de coordonnées (0,1 ; -0,4).

a) Calculer le nombre dérivé $f'(0,1)$. En déduire qu'une équation de la tangente D à la courbe $\mathcal{C}$ au point A est $y = 9x - 1,3$. Tracer cette tangente.

b) Calculer l'abscisse α du point d'intersection E de la droite D avec l'axe des abscisses.
On donnera une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

2) a) On note B le point de la courbe $\mathcal{C}$ de coordonnées (0,2 ; 0,19).
Tracer la droite (AB) et déterminer une équation de cette droite.

b) Calculer l'abscisse β du point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.
On donnera une valeur décimale approchée de β à 0,01 près par excès.

3) On admettra que l'on a : $\alpha < a < \beta$. Des résultats précédents, en déduire un encadrement de a.

(D'après sujet de Bac Pro Industries graphiques Session 1993)