FONCTIONS LOGARITHMES

I) La fonction logarithme népérien

Définition

Il existe une fonction appelée logarithme népérien et notée $f : x \mapsto \ln x$ définie sur $]0 ; +\infty[$.

Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$
Si $x > 1$, alors $\ln x > 0$
$\ln (1) = 0$

La fonction $f : x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Propriété

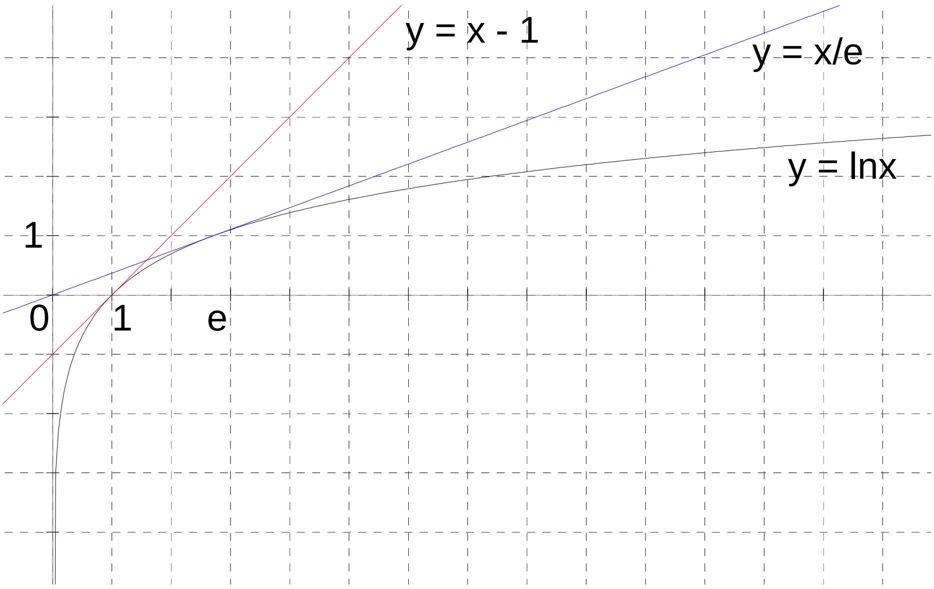
La fonction $f : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Étude et représentation

Il existe un nombre noté e tel que $\ln e = 1$ $\quad (e \approx 2{,}718281828\ldots)$

On peut dresser le tableau de variation de la fonction $\ln x$.

x	0	1	e	$+\infty$
Signe de $1/x$		+		
Sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe.

Au point $(1 ; 0)$, la tangente a pour équation : $y = x - 1$

Au point $(e ; 1)$, la tangente a pour équation : $y = \dfrac{x}{e}$ et passe par l'origine du repère.

II) Propriétés de calcul de la fonction logarithme

✔ Le logarithme népérien d'un produit de facteurs strictement positifs est égal à la somme des logarithmes népériens de chacun des facteurs.

$$\text{Si } a > 0,\ b > 0,\ c > 0, \text{ alors } \ln(abc) = \ln a + \ln b + \ln c$$

✔ Le logarithme népérien de l'inverse d'un réel strictement positif est l'opposé du logarithme népérien de ce nombre.

$$\text{Si } a > 0, \text{ alors } \ln(1/a) = -\ln a$$

✔ Le logarithme népérien du quotient d'un réel strictement positif a par un réel strictement positif b est la différence entre les logarithmes népériens de a et b.

$$\text{Si } a > 0,\ b > 0, \text{ alors } \ln(a/b) = \ln a - \ln b$$

✔ Si a est un réel strictement positif et n un entier relatif, alors :

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

✔ Si a est un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors :

$$\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a$$

III) Étude de la fonction logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme décimal est définie sur $]0\,;+\infty[$ par la relation :

$$\text{Log } x = M \times \ln x \text{ avec } M \approx 0,43429\ldots$$

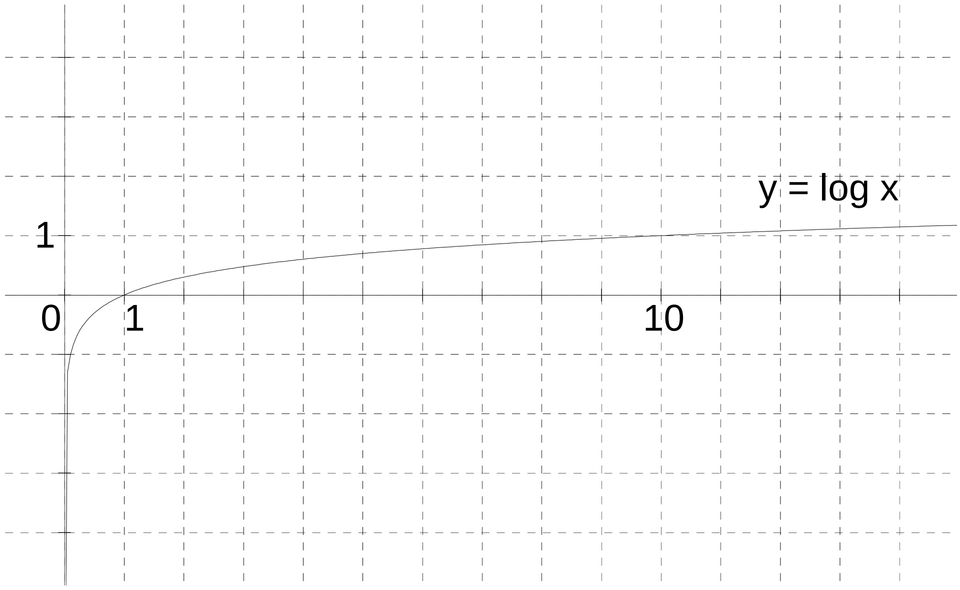
Propriétés

$M = \log e = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0,434294482\ldots$ $\dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{\log e} = \ln 10 \approx$ 2,302585093…

Étude et représentation

Tableau de variation de la fonction log x.

x	0	1	10	$+\infty$
Signe de (log x)'		+		
Sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \log x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



Propriétés

Les nombres a et b sont des réels strictement positifs.

- ✔ $\log(a \times b) = \log a + \log b$; $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$; $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
- ✔ Si n est un entier relatif, alors $\log a^n = n \log a$
- ✔ Si n est un entier naturel ≥ 2, alors $\log\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n}\log a$