EXERCICES SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

Exercice 1

Pour une fabrication comprise entre 1000 et 3000 sacs par an, le bureau d'étude établit les éléments suivants (n désigne le nombre de sacs produits, les prix sont donnés en euros).

- Le coût de production $\mathrm{C}(n)$ est donné par : $\mathrm{C}(n) = 151\,500 + 76n + 0,01n^2$.
- Le chiffre d'affaires $\mathrm{P}(n)$ est donné par : $\mathrm{P}(n) = 320n - 0,04n^2$.
- Le bénéfice $\mathrm{B}(n)$ est donné par : $\mathrm{B}(n) = \mathrm{P}(n) - \mathrm{C}(n)$.

1) Pour $n = 2000$, calculer :

a) Le coût de production.

b) Le chiffre d'affaire correspondant.

c) Le bénéfice réalisé.

2) Calculer le nombre n de sacs fabriqués pour un coût de production de 288 000 €.

3) On rappelle que le bénéfice $\mathrm{B}(n)$ pour une production de n sacs a pour expression :

$$\mathrm{B}(n) = \mathrm{P}(n) - \mathrm{C}(n).$$

Exprimer $\mathrm{B}(n)$ en fonction de n.

4) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1000;3000]$ par :

$$f(x) = -0,05x^2 + 244x - 151500.$$

a) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.

b) Résoudre $f'(x) = 0$.

c) Établir le tableau de variation de la fonction f.

5) On admet que la fonction f représente le bénéfice $\mathrm{B}(n)$ réalisé sur la vente de n sacs.

En utilisant les réponses de la question 4 :

a)Quel est le nombre d'articles qu'il faut fabriquer en un an pour obtenir le bénéfice maximal ?

b) Quel est ce bénéfice maximal ?

(*D'après Bac Pro Artisanat et métiers d'art option vêtements et accessoires de mode DOM TOM Session 2004*)

Exercice 2

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [18 ; 40] par : $f(x) = -1{,}5x^2 + 84x - 950$

1) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction *f*.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [18; 40].

3) Établir le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle [18 ; 40].

4) En déduire la valeur de *x* pour laquelle la fonction *f* admet un maximum.

(*D'après Bac Pro Restauration et alimentation Session juin 2003*)

Exercice 3

Monsieur Richard, directeur de l'établissement, vous demande de lui imprimer les graphiques correspondants à :

- l'évolution des ventes au cours des 100 derniers jours
- l'évolution des coûts de production d'une série d'imprimantes si l'on produit de 0 à 100 imprimantes ;
- l'évolution du cours de la bourse sur les actions CAP-BEL sur les 100 derniers jours.

Suite à une erreur dans la configuration de l'imprimante, les trois graphiques sont imprimés sans légende ni titre et sans unité explicitée sur les axes.

Sachant que le coût de production *C*, en euros, de *q* ordinateurs est donné par la relation :

$$C = q^3 - 120q^2 + 3600q + 10\,000$$

et afin de retrouver le graphique correspondant à l'évolution de ce coût, monsieur Richard vous demande de procéder comme il est indiqué ci-dessous.

Soit la fonction *f*, de la variable *x*, définie sur l'intervalle [0 ; 100], par

$$f(x) = x^3 - 120x^2 + 3\,600x + 10\,000$$

1) Déterminer la fonction dérivée *f'* de la fonction *f*.

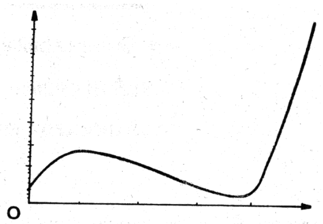
2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue *x*, $3x^2 - 240x + 3600 = 0$

3) Compléter le tableau de variation ci-dessous

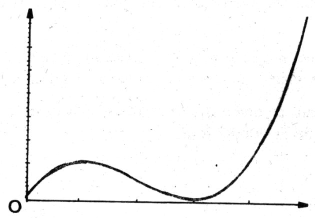
x	0		…..		…..		100
Signe de *f'*		+	0	–	0	+	
Sens de variation de la fonction *f*							

4) En déduire le numéro du graphique représentant l'évolution du coût de production (justifier la réponse donnée).

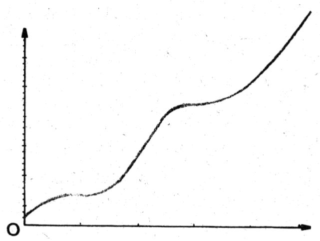
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



(*D'après sujet de Bac Pro Secrétariat Session 2000*)

Exercice 4

Partie I

On considère les deux fonctions f et g telles que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[20\ ;\ 80]$, $f(x) = 0{,}3x^2 - 40x + 1\,500$ et $g(x) = 0{,}7x^2 - 75x + 2\,150$.

1) Étude de la fonction f.

a) Compléter le tableau.

x	20	30	40	50	60	70	80
Valeur de $f(x)$	820		380		180		220

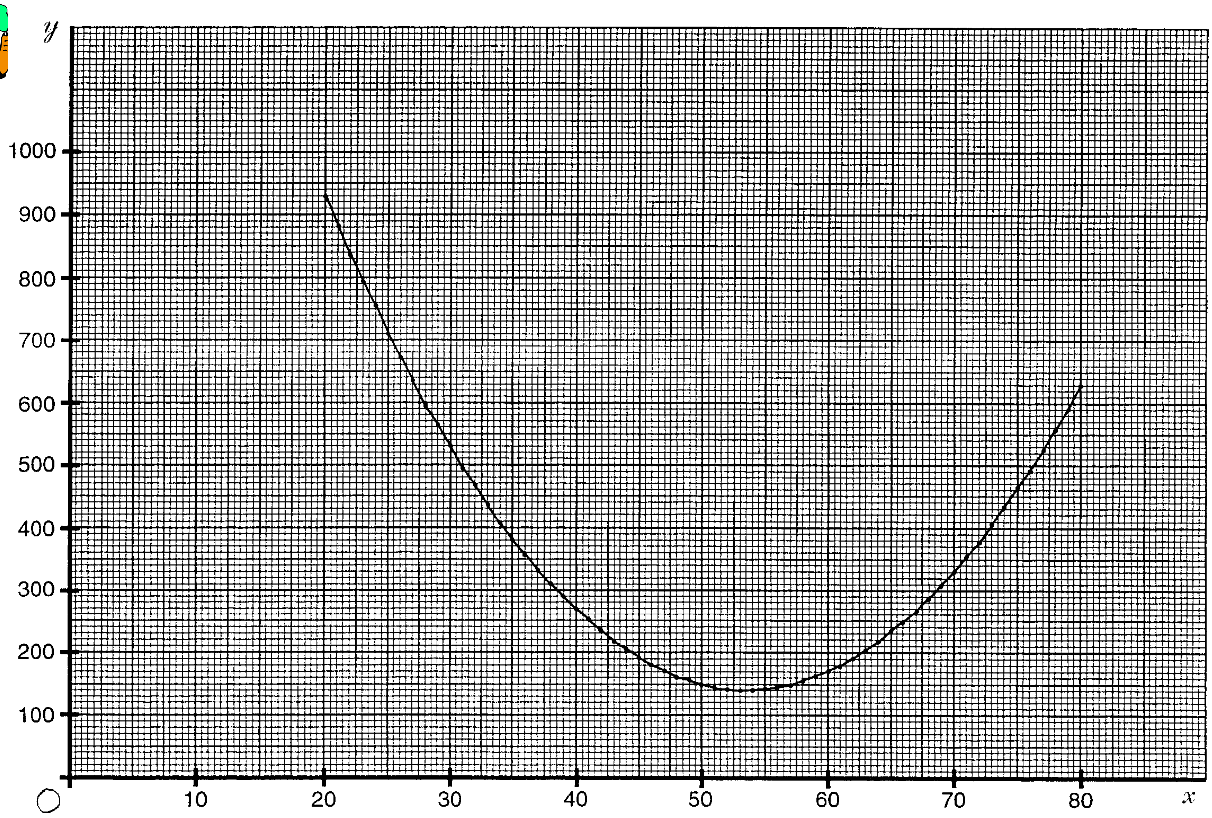
b) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [20 ; 80], calculer $f'(x)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation, d'inconnue x, $0{,}6x - 40 = 0$.

d) Compléter le tableau.

x	20		80
Signe de $f'(x)$		0	
Sens de variation de la fonction f			

2) La courbe $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère $(Ox\ ;\ Oy)$.



a) Dans le plan rapporté au repère $(Ox\ ;\ Oy)$, tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

b) On note A et B les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$; l'abscisse du point A étant inférieure à celle du point B.

Dans le plan rapporté au repère $(Ox\ ;\ Oy)$:

▪ situer les points A et B ;

▪ par une lecture graphique, proposer des valeurs possibles pour les abscisses des points A et B. (Laisser apparents les tracés ayant permis de répondre à cette question).

3) a) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [20 ; 80], écrire que $f(x) = g(x)$ équivaut à écrire que $-0{,}4x^2 + 35x - 650 = 0$.

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation, d'inconnue x,

$$-0{,}4x^2 + 35x - 650 = 0.$$

c) Donner les valeurs exactes et les valeurs arrondies à l'unité des abscisses des points A et B.

d) En utilisant le résultat précédent et le schéma, indiquer quel semble être l'ensemble des solutions de l'inéquation, d'inconnue x, $f(x) \leq g(x)$.

Partie II

La société AGRINOR est spécialisée dans la vente de sacs d'engrais.

Le responsable de la logistique vous demande de faire une étude comparative des coûts de mise à disposition des sacs par deux fournisseurs.

Les sacs sont vendus par lots de 1 000.

Pour tout nombre entier n de lots de 1 000 sacs, où n est compris entre 20 et 80 ($20 \leq n \leq 80$),

<u>Premier fournisseur</u> :

▪ le coût C_1, en euro, est $C_1 = 0,3\ n^2 - 40\ n + 1\ 500$;

<u>Second fournisseur</u> :

▪ le coût C_2, en euro, est $C_2 = 0,7\ n^2 - 75\ n + 2\ 150$.

En utilisant les résultats de la première partie, indiquer quel est le fournisseur que la société AGRINOR va retenir selon le nombre de lots commandés.

On pourra répondre par des phrases du type :

« Pour un nombre de lots compris entre ….. et ….., on choisit le ….. fournisseur ».

(*D'après sujet de Bac Pro Logistique Antilles Session 2000*)

<u>Exercice 5</u>

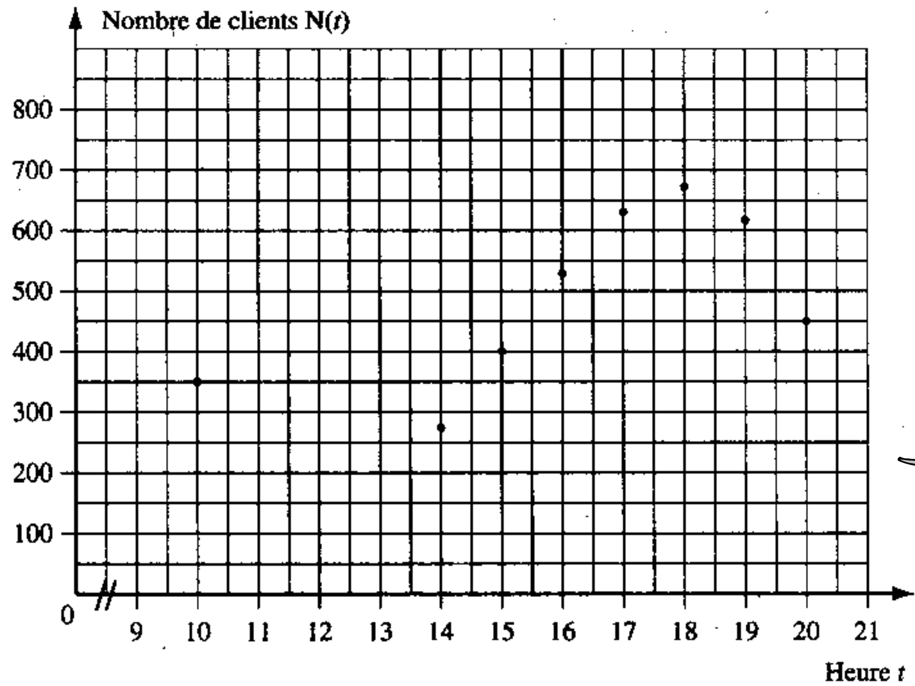
Dans une grande surface, un samedi, le nombre de clients $N(t)$ présents dans le magasin en fonction de l'heure (t) est donné par :

$$N(t) = -5t^3 + 225t^2 - 3\ 240t + 15\ 250 \qquad t \in [10\ ;\ 20]$$

1) Compléter le tableau de valeurs de la fonction N situé ci-dessous.

t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$N(t)$	350				270	400	530	630	670	620	450

2) Placer les points correspondants dans le repère situé ci-après.
Tracer la courbe représentative de la fonction N sur l'intervalle [10 ; 20].



3) Déterminer graphiquement le nombre de clients présents à 15 heures 30 minutes. Laisser apparents les traits permettant la lecture graphique.

4) Soit N' la fonction dérivée de N. Déterminer $N'(t)$.

5) L'équation $N'(t) = 0$ équivaut à $t^2 - 30t + 216 = 0$. Résoudre cette équation.

6) Compléter le tableau de variation situé ci-dessous.

t	10		…		…		20
$N'(t)$		…	0	…	0	…	
Sens de variation de la fonction N	….	↘	….	↗	….	↘	….

7) Déduire des résultats précédents l'heure à laquelle il faut prévoir un maximum de caissières pour fluidifier le passage aux caisses.

(*D'après sujet de Bac Pro Commerce Session juin 2003*)

<u>Exercice 6</u>

On considère la fonction f définie pour tout x de l'intervalle [300 ; 2 500] par :

$$f(x) = 4 - \frac{1500}{x}$$

1) a) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$.

c) Compléter le tableau de variation de la fonction f.

x	300	2 500
Signe de $f'(x)$		
Sens de variation de f		

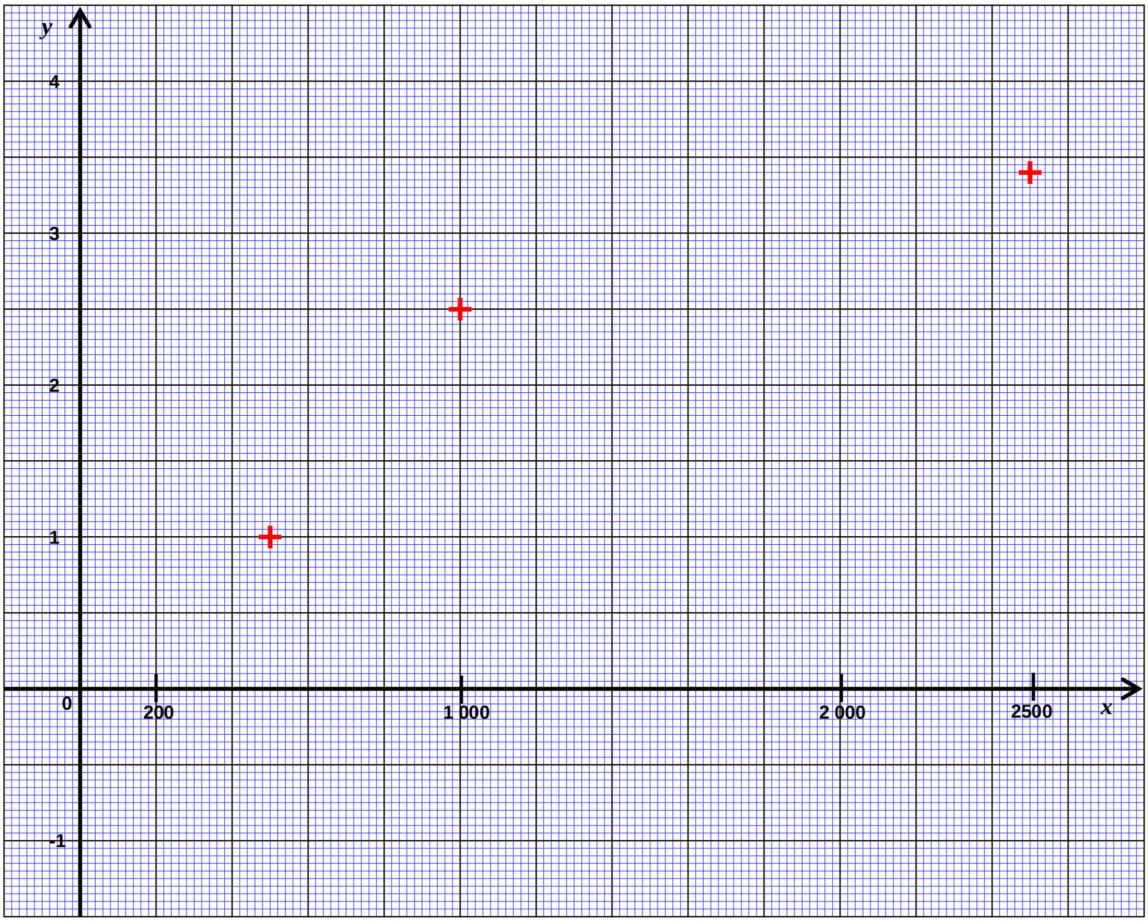
2) Compléter le tableau de valeurs exactes de $f(x)$.

x	300	500	750	1 000	1 250	2 000	2 500
$f(x)$		1		2,5			3,4

3) Tracer la courbe C, représentative de la fonction f sur l'intervalle [300 ; 2 500], dans le repère de ci-dessous où trois points de la courbe sont placés.

4) Tracer la droite D d'équation $y = 3$ dans le même repère.

5) Déterminer graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la courbe C et de la droite D. Laisser apparent le trait permettant la lecture.



(D'après sujet de Bac Pro Secrétariat Session juin 2005)

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur [45 ; 60] par $f(x) = -200x^2 + 21\,000x - 540\,000$

1) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

2) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

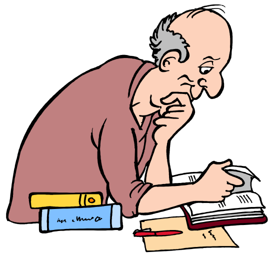
3) Résoudre l'inéquation $f'(x)>0$ et compléter le tableau de variation.

x	45		60
Signe de $f'(x)$		0	
Sens de variation de f			

4) Pour quelle valeur de x la fonction f est-elle maximale ?

(D'après sujet de Bac Pro Comptabilité Session juin 2005)

Exercice 8

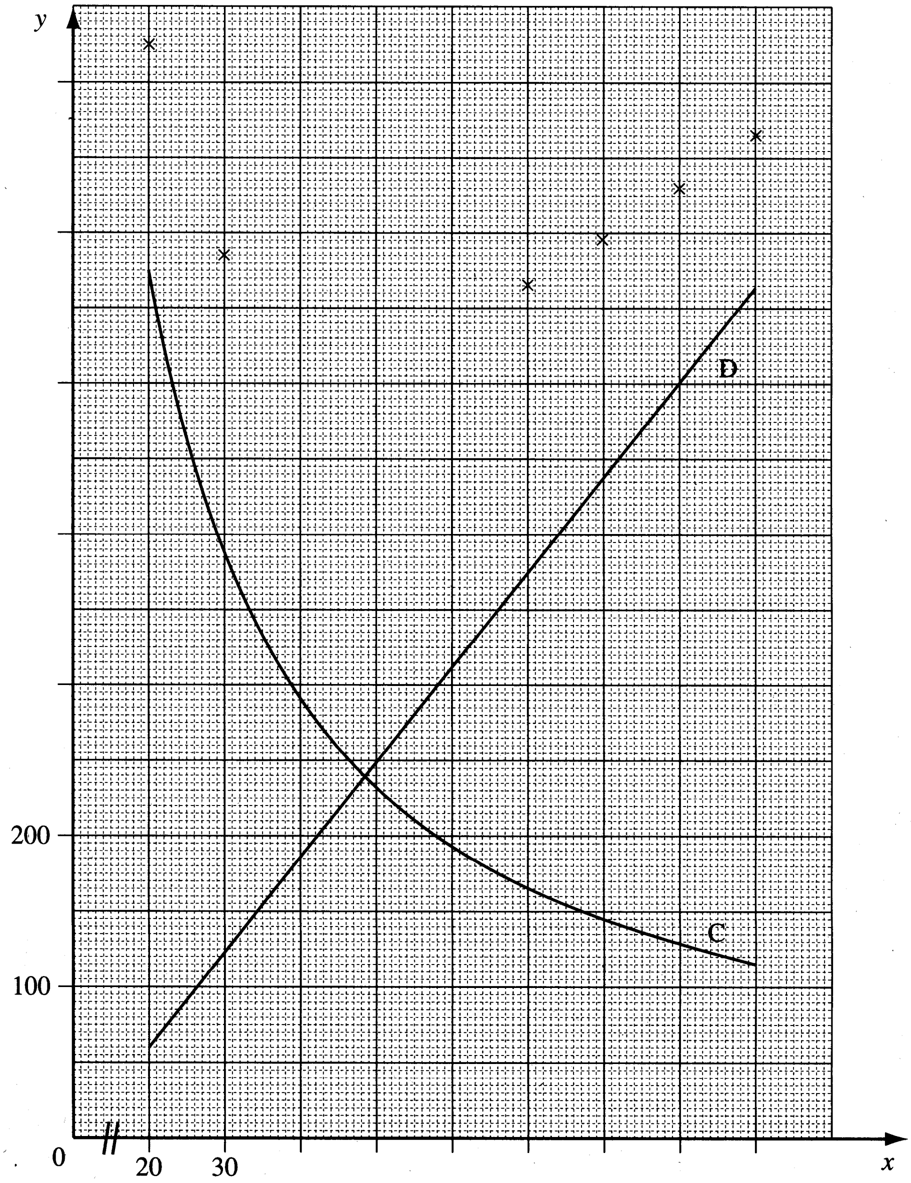


Soit les fonctions f et g, définies sur l'intervalle [20 ; 100] par :

$$f(x) = \frac{11\,520}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 5x + 50$$

Dans le repère suivant :

- la fonction f est représentée graphiquement par la courbe C,
- la fonction g est représentée graphiquement par la droite D.



La fonction h est définie sur l'intervalle [20 ; 100] par :

$$h(x) = \frac{11\,520}{x} + 5x + 50$$

1) On appelle E la représentation graphique de la fonction h dans le repère précédent.

a) Les six points d'abscisses respectives 20, 30, 70, 80, 90 et 100 représentés par des croix sur le graphique appartiennent à la courbe E.
Placer sur ce graphique les trois points de la courbe E d'abscisses respectives 40, 50 et 60.

b) À l'aide des neuf points précédents, tracer une courbe donnant l'allure de la représentation graphique *E* de la fonction *h*, sachant que le tableau de variation de *h* est le suivant (les valeurs de x_0 et de $h(x_0)$ ne sont pas demandées dans cette question)

x	20	x_0	100
Variation de h	↘	$h(x_0)$	↗

c) Par lecture graphique, proposer une valeur pour x_0 et une valeur pour $h(x_0)$ qui correspondent au minimum de la fonction *h*.

2) On note h' la dérivée de la fonction *h*.

a) Déterminer l'expression de $h'(x)$.

b) Vérifier que $h'(x)$ peut s'écrire sous la forme : $h'(x) = \dfrac{5x^2 - 11\,520}{x^2}$.

Résoudre l'équation $5x^2 - 11\,520 = 0$.

En déduire la valeur de la solution x_0 de l'équation $h'(x) = 0$, sachant que x_0 appartient à l'intervalle [20 ; 100].

c) Calculer la valeur du minimum $h(x_0)$ de la fonction *h*.

(*D'après sujet de Bac Pro Secrétariat Session septembre 2002*)

<u>Exercice 9</u>

L'ébauche de la vue de face d'un parapluie « ville » ouvert est présentée ci-après.

Pour compléter cette ébauche, on considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 45] par :

$$f(x) = -0{,}0004x^3 + 0{,}0038x^2 - 0{,}08x + 35$$

1) Calculer la fonction dérivée *f'* de la fonction *f*.

2) Vérifier que l'équation *f'*(x) = 0 n'admet pas de solution.

3) Compléter le tableau de variations de *f* .

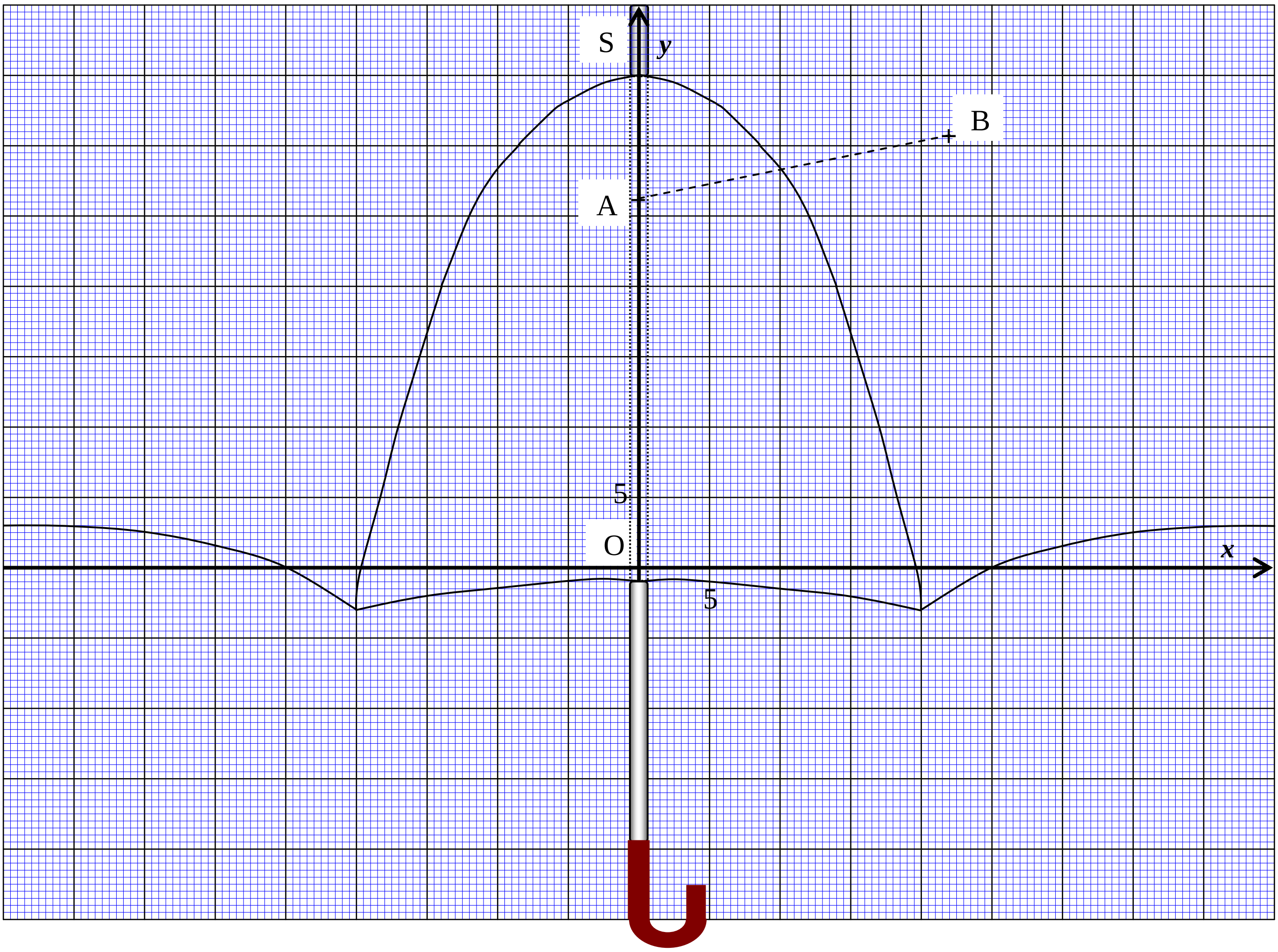
x	0	45
Signe de *f'*		
Variation de *f*		

4) Compléter le tableau de valeurs.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$f(x)$		34,6		33,3		29,1		19,7		2,6

5) Tracer la courbe *C* représentative de la fonction *f* sur [0 ; 45] ci-après.

6) Compléter l'ébauche du parapluie en construisant le symétrique de la courbe *C* par rapport à l'axe des ordonnées.



(*D'après sujet de Bac Pro MAVA Session juin 2005*)

Exercice 10

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [5 ; 130] par $f\left(x\right)=7+\frac{x}{80}+\frac{25}{x}$.

On note *f '* la fonction dérivée de la fonction *f*. Déterminer l'expression de $f'\left(x\right)$.

(*D'après sujet de Bac Pro Secrétariat Session septembre 2001*)