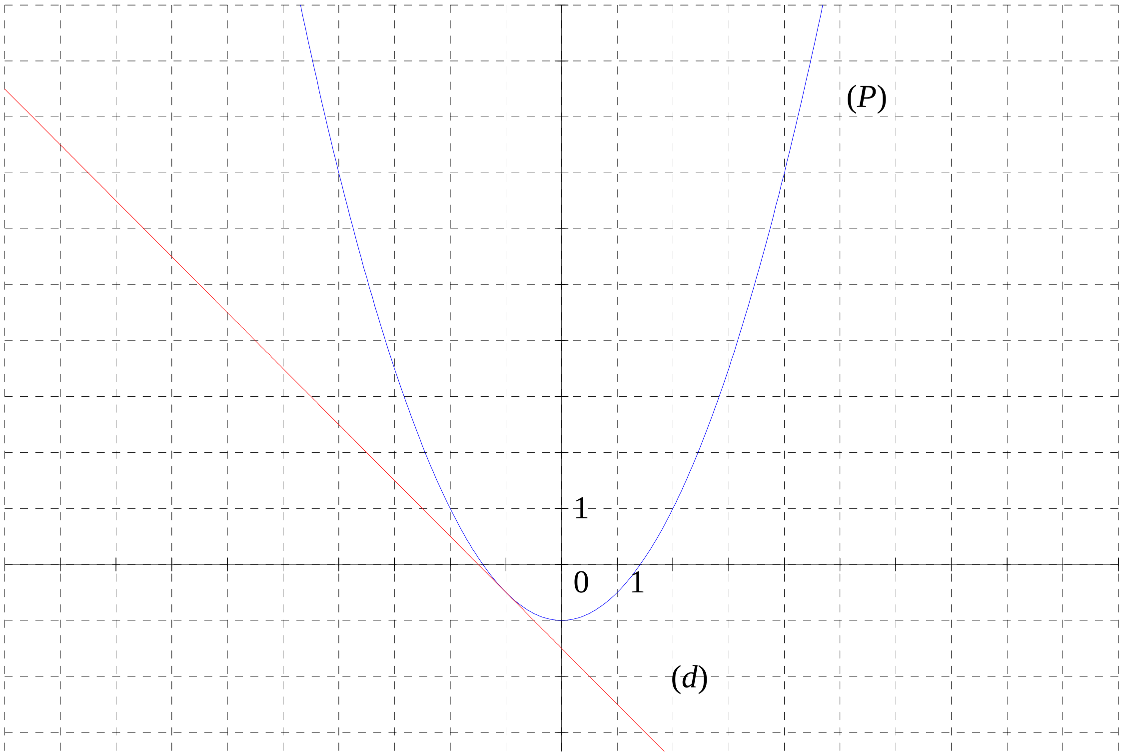
DÉRIVÉE D'UNE FONCTION

I) Notion de tangente

Considérons la parabole (*P*) d'équation $y = \frac{x^2}{2} - 1$ et la droite (*d*) d'équation $y = -x - \frac{3}{2}$.



On étudie l'intersection de la parabole avec la droite : on doit pour cela résoudre le système :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 1 \\ y = -x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

On a : $\frac{x^2}{2} - 1 = -x - \frac{3}{2}$ soit : $\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} = 0$ Ce qui donne $x^2 + 2x + 1 = 0$ puis $(x + 1)^2 = 0$.
On a donc une racine double $x = -1$.

La droite et la parabole ont un seul point commun. On dit que la droite (*d*) est tangente à la parabole (*P*) au point $A(-1\ ;\ -\frac{1}{2})$

Définition : Une parabole et une droite sont dites tangentes si elles ont en commun un point double, appelé point de contact. Nous admettrons qu'en tout point d'une parabole, il existe une droite tangente et une seule.

II) Nombre dérivé d'une fonction en un point.

On reprend l'exemple de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 1$. Au point $A(-1\ ;\ -\frac{1}{2})$, il y a une tangente à (P) d'équation $y = -x - \frac{3}{2}$, donc de coefficient directeur -1.

Nous dirons que le nombre –1, coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse –1, est le nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse –1 et nous le noterons $f\,'(-1)$.

L'équation de la tangente est donc : $\frac{y - f(-1)}{x - (-1)} = f\,'(-1)$ ou encore $y = f'(1)(x + 1) + f(-1)$

Définition : Considérons une fonction numérique f définie sur un intervalle I et sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal.
Si au point $A(x_0, f(x_0))$ de la courbe (C), il existe une tangente à (C) non parallèle à l'axe des ordonnées, alors on dit que la fonction f est dérivable au point x_0.

Le coefficient directeur de la tangente, noté $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse x_0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est : $y = f\,'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

III) Fonction dérivées des fonctions usuelles

Définition : Si en tout point d'un intervalle I, une fonction numérique f admet un nombre dérivé, alors on appelle fonction dérivée première et on note f' la fonction qui à tout réel x de l'intervalle I associe le nombre dérivé de la fonction f en ce point.

Propriétés

Soit f et g deux fonctions numériques, définies et dérivables sur un intervalle I et soit k une constante réelle :

- La fonction $F : x \mapsto kf(x)$ est dérivable sur I et $F'(x) = kf'(x)$.

- La fonction $G : x \mapsto f(x) + g(x)$ est dérivable sur I et $G'(x) = f'(x) + g'(x)$

- Si $f'(x)$ ne s'annule pas sur I, alors la fonction
$H : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est dérivable sur I et $H'(x) = \frac{-f\,'(x)}{(f(x))^2}$

IV) Application des dérivées à l'étude des fonctions

Propriétés

Considérons une fonction numérique f, définie et dérivable sur un intervalle I.

Pour tout réel x de I,
- Si $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I
- Si $f'(x) < 0$ alors f est décroissante sur I
- Si $f'(x) > 0$ alors f est croissante sur I

Si pour une valeur de x_0 de I, $f'(x_0) = 0$ avec changement de signe, alors la fonction f passe par un extremum $x = x_0$.

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	↘	minimum	↗

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f	↗	maximum	↘

V) Tableau des dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**Fonction f'**
$x \mapsto k$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^3$	$x \mapsto 3x^2$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto ax+b$	$x \mapsto a$
$x \mapsto ax^2+bx+c$	$x \mapsto 2ax+b$
$x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$	$x \mapsto 3ax^2+2bx+c$
$x \mapsto ax^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nax^{n-1}$
$x \mapsto \frac{k}{x}$	$x \mapsto -\frac{k}{x^2}$