EXERCICES SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

Exercice 1

La société SAMINS confectionne des bagages souples. Le modèle *Pandora* est de forme cylindrique. Pour un sac dont le rayon est x (en cm), l'aire (en cm²) de la surface de polyamide nécessaire est :

$$f(x) = 6x^2 + \frac{40500}{x}$$

1) Calculer la fonction dérivée f', déduire $f'(10)$, $f'(15)$ et $f'(18)$.

2) Etablir le tableau des variations de la fonction f si x appartient à l'intervalle [5 ; 30].

3) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

4) Déduire la mesure à donner au rayon du sac pour que la surface de polyamide soit minimale. Quelle est alors l'aire minimale ?

(*D'après sujet de Bac Pro*)

Exercice 2

La consommation E (en litre pour 100 km) d'un véhicule est fonction de sa vitesse v (en km/h).
On admet que cette consommation a pour équation :

$$E = 6 + \frac{v}{60} + \frac{25}{v}$$

1) Etudier les variations de E lorsque la vitesse v varie de 5 à 200 km/h.
Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimale ? Quelle est cette consommation ?

2) Tracer la courbe représentative de la fonction $v \mapsto E(v)$.

(*D'après sujet de Bac Pro*)

Exercice 3

Le bénéfice B réalisé par une société pour un nombre q d'articles produits est donné par la relation :

$$B(q) = -28000 + 350q - 0{,}7q^2$$

1) Soit la fonction f définie sur l'intervalle [100 ; 400] par : $f(x) = -0{,}7x^2 + 350x - 28000$

a) Etudier les variations de f sur l'intervalle considéré.

b) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans l'intervalle [100 ; 400], dans un repère orthogonal (unités : 0,04 cm en abscisse et 0,01 en ordonnée).

c) Déterminer les coordonnées du sommet de la courbe $\mathscr{C}$.

2) Vérifier que $B(q) = f(q)$. Déduire le nombre d'articles pour lequel l'entreprise réalisera le bénéfice maximal. Quel sera, dans ce cas, ce bénéfice ?

(*D'après sujet de Bac Pro*)

Exercice 4

Le coût total de production d'un article varie en fonction du nombre d'objets fabriqués x suivant la formule : $C(x) = x^2 - 24x + 225$.

1) Calculer $C(1)$, $C(10)$, $C(20)$ et $C(25)$.

2) Etudier et représenter graphiquement $C(x)$, pour $x \in [1 ; 25]$. Quelle est la nature de la courbe obtenue ?

3) Les articles sont vendus 16 € pièce. Exprimer la recette totale en fonction de x ; soit $g(x)$.

4) Exprimer le résultat bénéficiaire en fonction de x, soit $h(x)$. Pour quelle valeur de x, $h(x)$ est maximum ? Calculer le résultat bénéficiaire maximum.

5) Le coût moyen unitaire est donné par la formule : $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

Pour quelle valeur de x, $C_m(x)$ est minimum ? Calculer ce coût moyen unitaire minimum.

(*D'après sujet de Bac Pro Exploitation des transports*)

Exercice 5

On considère la fonction f de la variable x définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2700}{x} + 3x + 40$$

1) Calculer $f'(x)$ (où f' désigne la dérivée de f).

2) Montrer que f' s'annule pour une valeur de x_0. Calculer ce minimum.

Dans une entreprise, le coût global de production C varie en fonction de la quantité produite q. Le tableau suivant indique le coût global de production correspondant à différentes valeurs de q.

q	10	20	30	40	50
$C(q)$	3400	4700	6600	9100	12200
q	60	70	80	90	100
$C(q)$	15290	20200	25150	30600	36700

3) Placer les points dans un repère cartésien.

4) On suppose que $C(q)$ est de la forme : $C(q) = 3q^2 + 40q + 2700$

a) La fonction $C(q)$ prend-elle en tous points les valeurs portées dans le tableau ?

b) Que peut-on dire de la courbe $\mathcal{C}$ de C ?

5) On définit le coût moyen de production C_m par :

$$C_m = \frac{C(q)}{q}$$

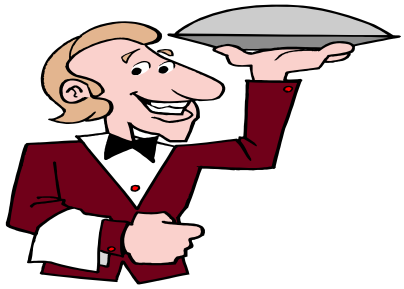
Déterminer la valeur q_0 pour laquelle le coût moyen est minimum. (On pourra utiliser directement le résultat de la question 2).

(*D'après sujet de Bac Pro Exploitation des transports*)

Exercice 6

Quel que soit le repas, il est vendu 20 €. Une étude montre que les charges dépendent du nombre de repas vendus selon la relation :

$$C(x) = \frac{x^2}{4} - 40x + 1\,000$$



où x est le nombre de repas et $C(x)$ les charges en euros.

1) Exprimer en fonction de x le montant $V(x)$ de la vente de x repas.

2) Calculer $V(x) - C(x)$.

Soit f la fonction définie sur [0 ; 200] par $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 60x - 1\,000$

3) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

4) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 200].

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f et préciser le nombre de repas permettant un bénéfice maximum.

(*D'après sujet de Bac Pro Restauration*)

Exercice 7

Une entreprise estime que le coût C de gestion de son stock est lié au nombre de commandes par la formule : $C = 400n + \frac{57600}{n}$ où C est exprimé en €.

Le nombre de commandes n est compris entre 3 et 16 ($3 \leq n \leq 16$).

1) a) Vérifier que le coût de gestion d'un stock pour trois commandes s'élève à 20 400 €.

b) Calculer le coût de gestion pour 16 commandes.

2) On se propose de déterminer le nombre de commandes qui permettent d'obtenir un coût minimum C_m de gestion. A cet effet, on considère la fonction f de la variable x définie sur l'intervalle [3 ; 16] par : $f(x) = 400 + \frac{57\,600}{x}$

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	3	6	8	10	12	15	16
$f(x)$							

b) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un plan rapporté au repère (Ox ; Oy).

c) Par une lecture graphique, indiquer quelle semble être la valeur minimale prise par la fonction f. Laisser apparaître les tracés qui ont permis de déterminer cette valeur.

d) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

On sait que pour tout x de l'intervalle [3 ; 16], $f'(x) = \frac{400x^2 - 57\,600}{x^2}$

e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $400x^2 - 57\,600 = 0$.

Déduire la valeur exacte de la solution x_0 de l'équation d'inconnue x : $f'(x) = 0$.

f) Sachant que la fonction f atteint un minimum en x_0 calculer la valeur exacte de ce minimum.

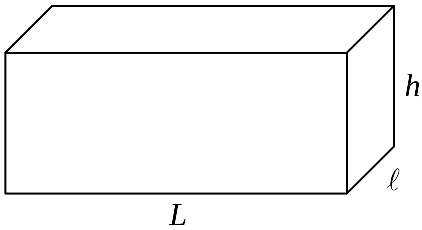
g) À l'aide des résultats trouvés précédemment, indiquer, en une phrase, quel est le coût minimum C_m de gestion et le nombre de commandes correspondant.

(*D'après sujet de Bac Pro Vente - Représentation*)

Exercice 8

Une entreprise d'emballage industriel veut réaliser un conteneur ayant la forme d'un parallélépipède rectangle pour un transport maritime à l'exportation.
Pour des raisons techniques, ses dimensions intérieures sont liées par les relations :

$\ell + h = 5{,}4$ m
$\ell + L = 11$ m



1) Exprimer h et L en fonction de ℓ .

2) Montrer que le volume V s'exprime en fonction de ℓ par la relation :

$$V = \ell^3 - 16,4\ell^2 + 59,4\ell$$

3) Soit la fonction f définie sur [1 ; 4] par : $f(x) = x^3 - 16,4x^2 + 59,4x$.

a) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de f.

b) Montrer que l'équation $3x^2 - 32,8x + 59,4 = 0$ admet deux solutions non nulles x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) que l'on calculera (arrondir au centième).

c) On admettra que la fonction f admet un maximum pour la valeur x_1. Calculer ce maximum.

4) Déduire de l'étude précédente les dimensions intérieures (arrondies au centimètre) du conteneur ayant un volume maximum.

(*D'après sujet de Bac Pro Logistique et transports*)