



LE CALCUL INTÉGRAL

I) Primitives d'une fonction

Définition

Une fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I , si elle a pour fonction dérivée la fonction f : pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.

Propriétés

- Si F est une primitive de f sur l'intervalle I , alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies, pour tout x de I , par :
 $G(x) = F(x) + c$ où c désigne un nombre réel quelconque.
- Sur l'intervalle I , si F est une primitive de f et si G est une primitive de g , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF est une primitive de kf (k réel donné).

II) Intégrales d'une fonction sur un intervalle $[a ; b]$

Définition

F est une primitive de f sur l'intervalle I et a et b sont deux nombres réels de I ; l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$ est le nombre :

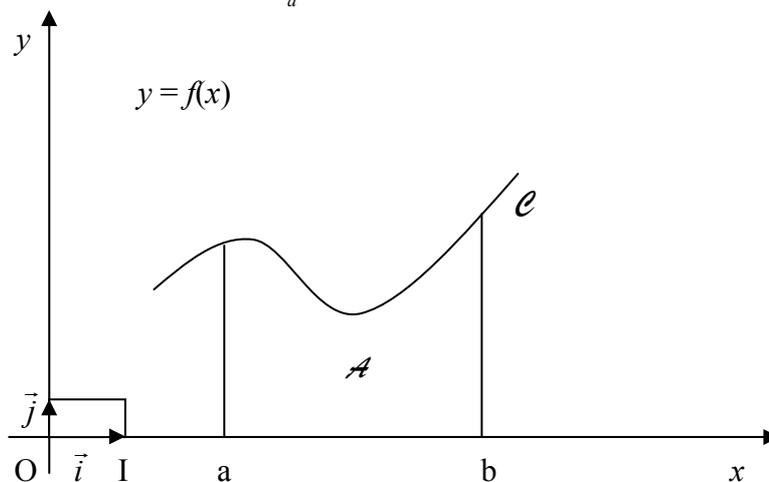
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Interprétation géométrique pour une fonction positive

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'unité d'aire est l'aire du rectangle (ou du carré) de cotés $[OI]$ et $[OJ]$.

En unités d'aire, l'aire \mathcal{A} du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$$





Propriétés

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ réel})$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (\text{relation de Chasles})$$

III) Application de l'intégrale définie

1) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition

Le nombre réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$.

2) Valeur efficace d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit une fonction f périodique de période T , admettant des primitives. Le nombre réel μ

défini par : $\mu = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$, est la valeur efficace de la fonction f sur une période.