EXERCICES SUR LES INTÉGRALES

Exercice 1

Donner les primitives des fonctions *f*, *g*, *h* et *k*.

$$f(x) = x(x-1) \quad ; \quad g(x) = e^x + e^{-x} \quad ; \quad h(x) = \sin x + \cos x \quad ; \quad k(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

Exercice 2

Calculez les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 (3x-4)dx \quad ; \quad B = \int_{-1}^1 (x+5)^2 dx \quad ; \quad C = \int_1^3 \left(1+\frac{2}{x^2}\right)^2 dx \quad ; \quad D = \int_1^2 \frac{3dx}{x}$$

$$E = \int_2^3 e^{2x} dx \quad ; \quad F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad ; \quad G = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad ; \quad H = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 3t)dt$$

Exercice 3

La découpe en arrondi d'une pièce peut être décrite par l'intermédiaire de la fonction numérique *f* définie sur l'intervalle]0 ; 4] par :

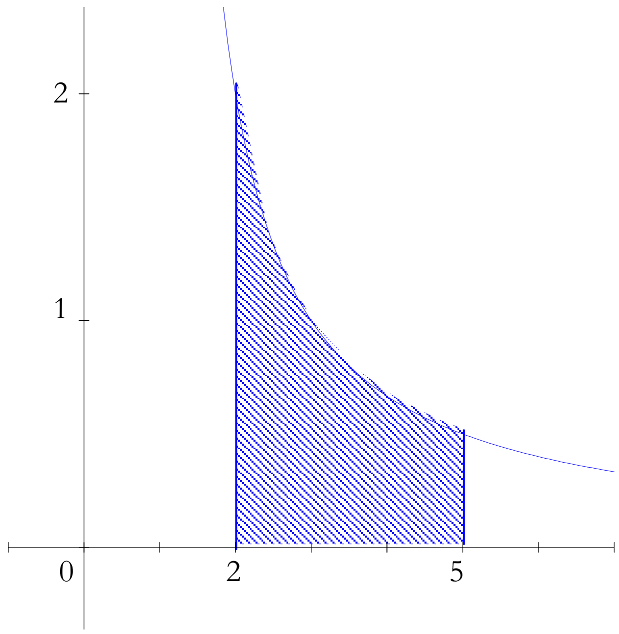
$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

Calculer $\int_1^2 f(x)dx$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième.

(*D'après sujet de Bac Pro P.M.S Session 1992*)

Exercice 4

Soit la courbe représentative de la fonction *f* définie sur l'intervalle]1 ; 7] par : $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

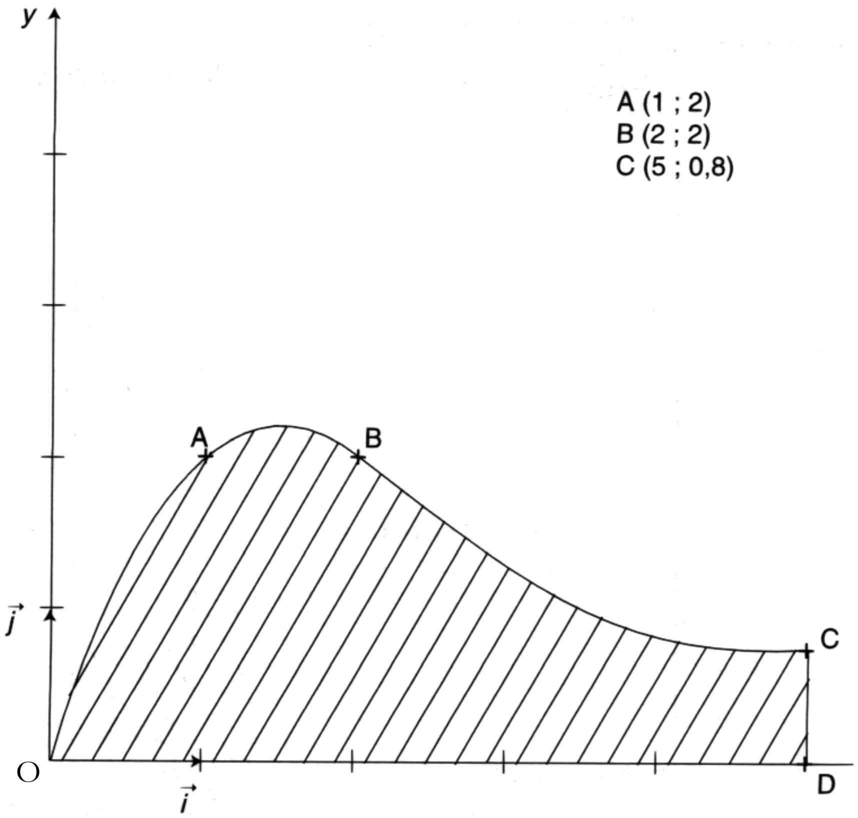


Dans le repère, orthogonal ci dessus, les unités graphiques sont 1 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée.
Calculer l'aire du domaine plan hachuré au mm² près.

(*D'après sujet de Bac Pro Outillage Session 1992*)

Exercice 5

La figure donnée représente le profil d'une pièce dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Les coordonnées des points *A*, *B*, *C*, *D*, sont : *A*(1 ; 2), *B*(2 ; 2), *C*(5 ; 0,8), *D*(5 ; 0).



1) L'arc *OB* est un arc d'une parabole *P*.

L'équation de cette parabole *P* est de la forme : $y = ax^2 + bx$; *a* et *b* réels.

En écrivant que la parabole *P* passe par le point *A* et par le point *B*, déterminer les nombres *a* et *b*.

2) Pour toute la suite du problème, on admet :
- que l'arc de courbe *OB* est la représentation graphique de la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 2] par : $f(x) = -x^2 + 3x$
- que l'arc de courbe *BC* est la représentation graphique de la fonction *g* définie sur l'intervalle [2 ; 5] par : $g(x) = \frac{4}{x}$.

On se propose de déterminer l'aire de la surface hachurée :

a) Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 (-x^2 + 3x)dx$

b) Calculer l'intégrale $J = \int_2^5 \frac{4}{x} dx$

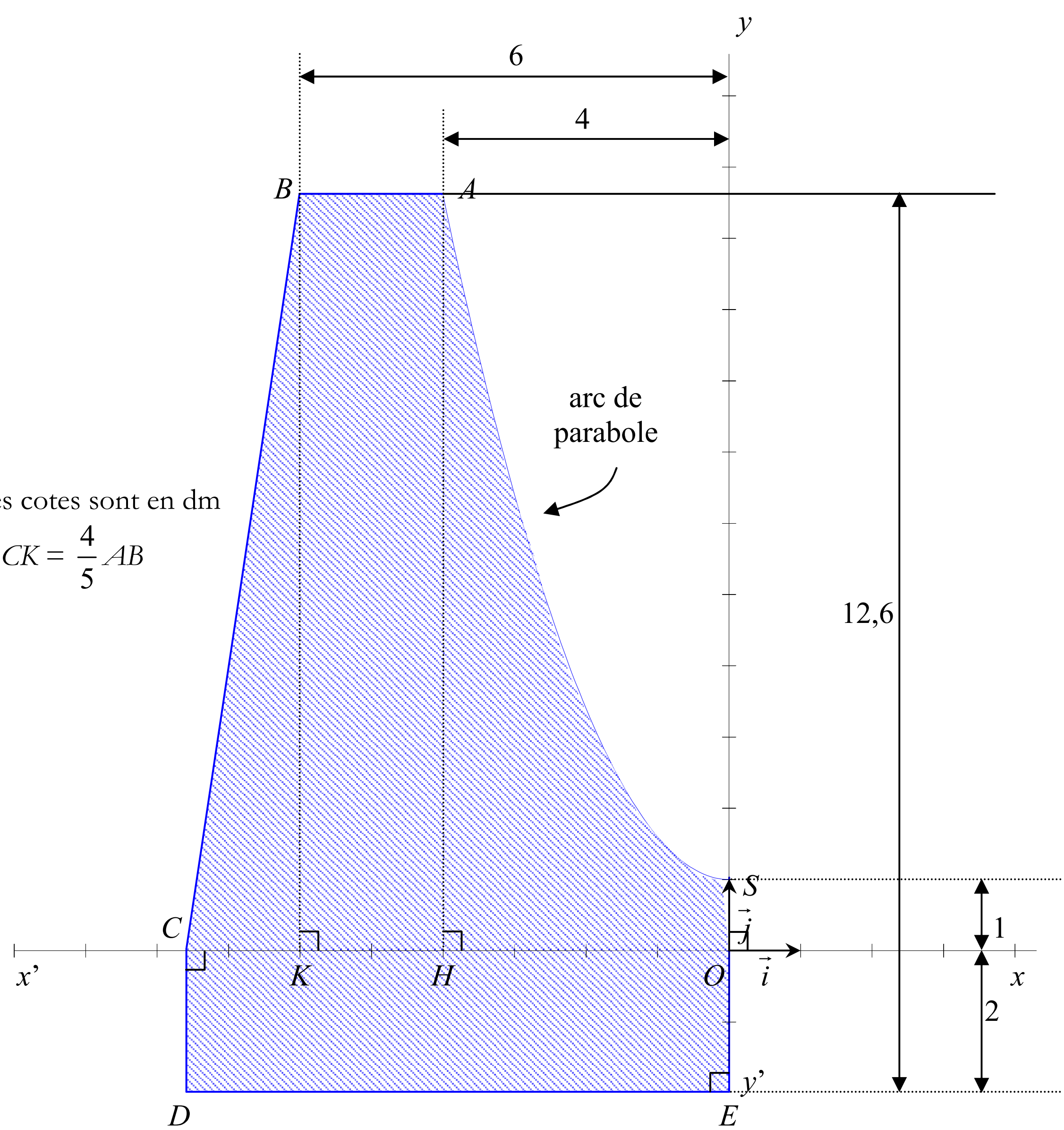
c) En utilisant les résultats précédents calculer, en unité d'aire, l'aire de la surface hachurée.

(*D'après sujet de Bac Pro Définition des produits industriels Session 1994*)

Exercice 6

Un élément de bois servant à l'élaboration d'un coffrage a la forme ci-dessous.
On considère le repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, d'unité graphique 1 cm.

1) Montrer que l'équation de la parabole P d'axe $(y'y)$, de sommet S et passant par A, est $y = \frac{3}{5}x^2 + 1$.
2) On se propose d'évaluer l'aire, en dm², du domaine hachuré.
   a) Calculer l'aire A_1, du domaine $AHOS$ délimité par l'arc AS de la parabole P, l'axe $(x'x)$ et les droites d'équations $x = -4$ et $x = 0$.
   b) Calculer l'aire A_2 du domaine hachuré.



Les cotes sont en dm

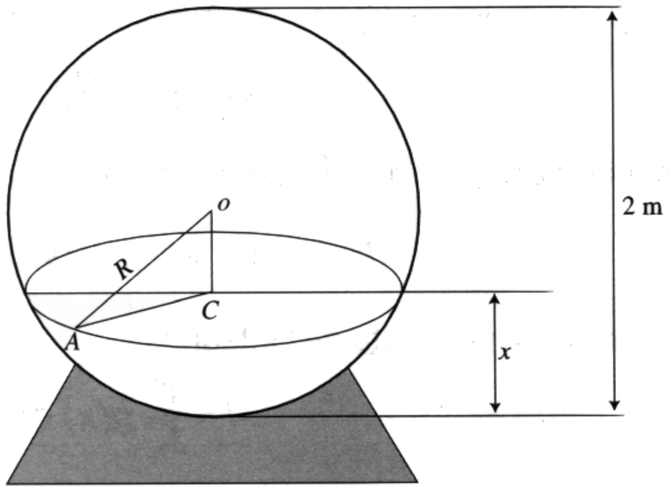
et $CK = \frac{4}{5}AB$

(*D'après sujet de Bac Pro Bâtiment Session 1992*)

Exercice 7

La cuve sphérique de centre O, de rayon $R = 1$ m, représentée ci dessous, contient un liquide dont la surface libre est située à la cote x (en mètres).
La surface libre du liquide est le disque de centre C et de rayon CA.

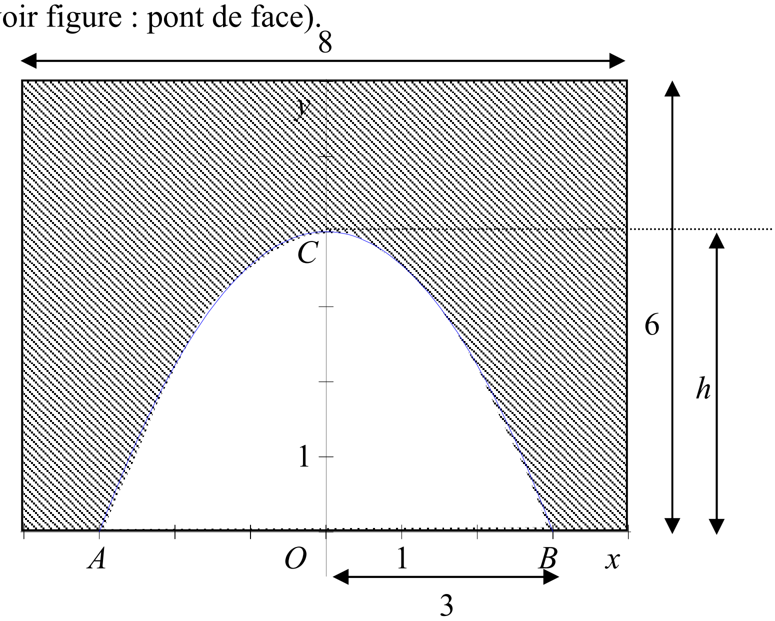
1) En considérant le triangle OCA, rectangle en C, vérifier que $OC = 1 - x$
2) Déterminer l'expression de CA^2 en fonction de x.
3) En déduire que l'expression de l'aire de la surface libre du liquide, en fonction de x, est :
   $$S(x) = 2\pi x - \pi x^2 \text{ (aire en m}^2\text{)}$$
   Vérifier l'expression obtenue pour les valeurs particulières suivantes de x : 0 ; 1 ; 2.
4) Calculer l'intégrale $V = \int_0^2 (2\pi x - \pi x^2)dx$, qui représente le volume en m^3 de la cuve.



(*D'après sujet de Bac Pro Définition produits industriels Session 1993*)

Exercice 8

Une autoroute doit couper une voie ferrée. Une entreprise est chargée de construire un pont par dessus la voie ferrée pour laisser passer l'autoroute. La longueur totale du pont est de 8 m ; sa hauteur de 6 m (voir figure : pont de face).



L'ouverture est limitée par un arc de parabole de hauteur $h = 4$ m et d'axe de symétrie (Oy). Les points A et B sont tels que $OA = OB = 3$ m. Pour des raisons de sécurité, l'aire de l'ouverture doit être inférieure ou égale au tiers de l'aire totale de la façade.

1) On considère le repère orthonormal d'axes (Ox) et (Oy) où 1 cm représente 1 m. Une équation de la parabole dans ce repère est de la forme : $y = ax^2 + c$. Déterminer c, puis a.
2) Calculer l'intégrale I définie par $I = \int_0^3 [\frac{-4}{9}x^2 + 4]dx$.

Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

3) Vérifier que cette ouverture correspond aux normes du cahier des charges.

(*D'après sujet de Bac Pro Travaux publics Session 1993*)

Exercice 9

1) Sur la figure ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O*x*, O*y*) d'unité graphique 3 cm, on considère les points A et B ayant respectivement pour coordonnées (-1 ; 0) et (1 ; 0).

a) Placer les points *A* et *B*.

b) Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB].

c) Montrer que l'une des équations du cercle $\mathcal{C}$ est : $x^2 + y^2 = 1$.

d) Indiquer quelle est la partie du cercle $\mathcal{C}$ dont une équation est $y = \sqrt{1 - x^2}$.

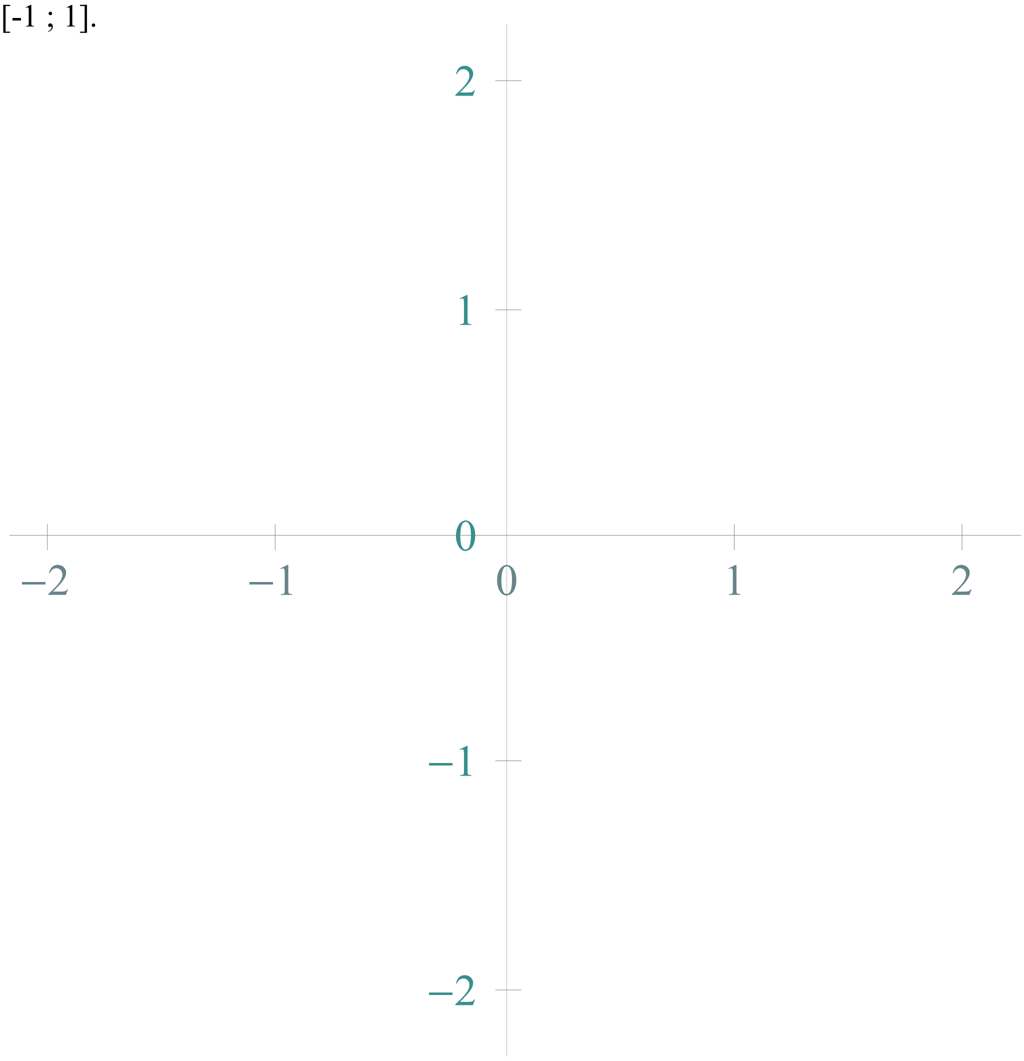
2) Le signal *u* est le signal défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2 tel que pour tout réel *x* de l'intervalle [-1 ; 1] : $u(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

a) Tracer en rouge, dans le plan rapporté au repère (O*x*, O*y*) la courbe représentative du signal *u* considéré sur l'intervalle [-2 ; 2].

b) Calculer $\int_{-1}^{1} [u(x)]^2 dx$.

c) En utilisant la réponse donnée à la question 2) a), interpréter graphiquement l'intégrale $\int_{-1}^{1} u(x) dx$, puis en déduire sa valeur exacte.

d) Calculer les valeurs exactes de la valeur moyenne et de l'énergie moyenne du signal *u* sur l'intervalle [-1 ; 1].



(*D'après sujet de Bac Pro Industriel Session 1998*)

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ \pi\,]$ par $f(x) = 2(1+\cos x)$.

1) Tracer la courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 4cm sur chaque axe).

2) On considère le domaine plan défini par : $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq f(x)$. Calculer en cm² l'aire de ce domaine.

(*D'après sujet de Bac Pro E.I.E Session 1991*)

Exercice 11

Une pièce de verre, initialement froide, est portée rapidement à la température de 550°C puis on la laisse immédiatement refroidir. On admet alors que le temps t_2 nécessaire pour obtenir un refroidissement de 550°C à 450 °C est donné, en minute, par l'intégrale :

$$t_2 = \int_0^{100} e^{-0,0347x}\,dx$$

1) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-0,0347x}$.

2) Calculer t_2 et donner la valeur arrondie à la minute de t_2.

(*D'après sujet de Bac Pro E.I.E Session 1994*)