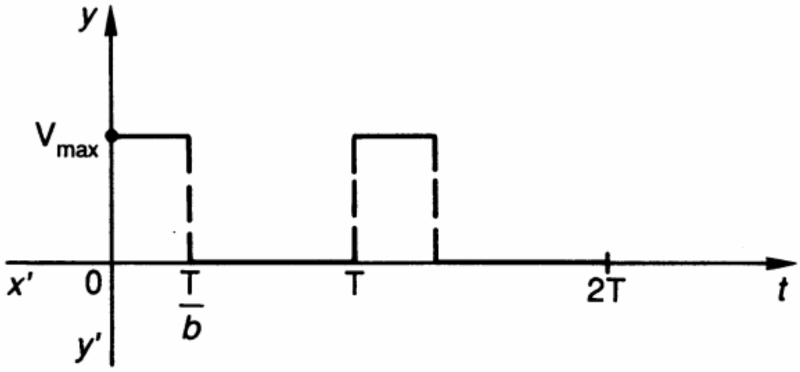
EXERCICES SUR L'APPROXIMATION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Exercice 1

On donne un entier b supérieur ou égal à 2.
Un signal de période T est représenté par le graphique ci-dessous :



Ce signal peut être décrit par la fonction périodique y, de période T, d'amplitude maximale V_{max} définie sur $[0\ ;\ T[$ par :

$$\text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{b}, \quad y(t) = V_{max} \ ,$$

$$\text{si} \quad \frac{T}{b} < t < T, \quad y(t) = 0$$

On sait que la décomposition harmonique de $y(t)$ s'exprime par :

$$y(t) = Yo + A_1\cos(\omega t) + B_1\sin(\omega t) + ... + A_k\cos(k\omega t) + B_k\sin(k\omega t) + ... \qquad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

On donne : $Y_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(t)dt$

et pour $k \geq 1$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(k\omega t)\ dt\,, \qquad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(k\omega t)\ dt$$

1) Que représente Y_0 pour la fonction y. Calculer Y_0 en fonction de V_{max} et b.

2) Calculer A_1 et B_1 en fonction de V_{max} et b.

(*D'après sujet de Bac Pro Maintenance de l'audiovisuel électronique Session 1988*)

Exercice 2

On considère un signal u périodique dont l'expression du polynôme de Fourier d'ordre 7 est :

$$u(t)=\frac{5}{2}+\frac{10}{\pi}\sin(1000\pi t)-\frac{10}{3\pi}\sin(3000\pi t)+\frac{10}{5\pi}\sin(5000\pi t)-\frac{10}{7\pi}\sin(7000\pi t)$$

- $u(t)$ est une tension exprimée en volt (V)
- les fréquences sont exprimées en Hertz (Hz)

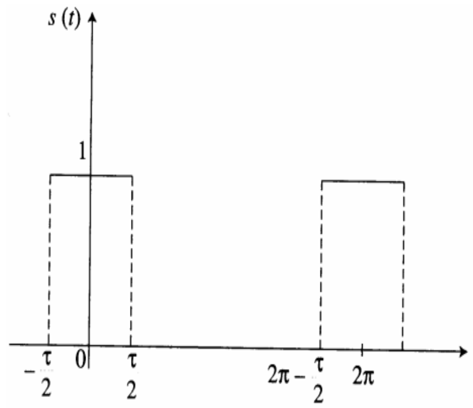
1) Donnez la valeur moyenne du signal u.
2) Déterminez la fréquence f_1 du fondamental du signal.
3) Construisez la représentation graphique du spectre C_n du signal pour des fréquences appartenant à l'intervalle [0 ; 3 500].
On rappelle que l'amplitude C_n de la raie d'ordre n du spectre est telle que :

$$C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

Prenez comme échelles :
axe des abscisses : 1 cm pour 250 Hz.
axe des ordonnées : 2 cm pour 1 V.
(Utilisez une feuille de papier millimétré.)

(*D'après sujet de Bac Pro Maintenance des réseaux bureautiques et télématiques Session 1994*)

Exercice 3



On considère le signal s ayant la forme d'onde apparaissant sur le schéma (où $\tau \leq 2\pi$).
s a pour période 2π .

$$s(t)=1 \text{ si } -\frac{\tau}{2}\leq t\leq\frac{\tau}{2}$$

$$s(t)=0 \text{ si } \frac{\tau}{2}<t<2\pi-\frac{\tau}{2}$$

1) On suppose que $\tau=\pi$.
Etablir la relation générale pour calculer les coefficients de Fourier.

2) Calculer les coefficients de Fourier jusqu'au rang n = 5.

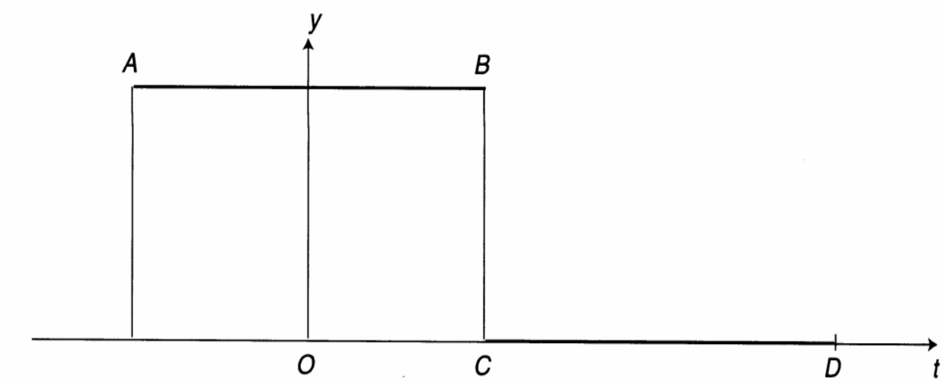
(*D'après sujet de Bac Pro MRBT Session 1990*)

Exercice 4

Le signal u est un signal périodique de période T $(T > 0)$ défini sur $\mathbb{R}$.
Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) :
- les points, A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$\left(\frac{-T}{4};5\right),\ \left(\frac{T}{4};5\right),\ \left(\frac{T}{4};0\right) \text{et} \left(\frac{3T}{4};0\right).$$

- la représentation graphique du signal u considéré sur l'intervalle $\left[\frac{-T}{4};\frac{3T}{4}\right]$ est constituée des segments de droites [AB] et [CD]



1) Donner la représentation graphique, dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy), du signal u considéré sur l'intervalle $\left[\frac{-T}{2};\frac{T}{2}\right]$

On rappelle que les coefficients de Fourier a_n et b_n du signal u sont donnés par les formules :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt \text{ et en posant : } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

pour tout n entier strictement positif $(n > 0)$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\,\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\,\sin(n\omega t)\,dt$$

2) Indiquer quelle sont, pour tout entier n strictement positif (n > 0), les valeurs des coefficients de Fourier b_n du signal u.

3) Déterminer la valeur de $u(t)$ pour :

a) $-\frac{T}{2} \le t < -\frac{T}{4}$ b) $-\frac{T}{4} \le t < \frac{T}{4}$ c) $\frac{T}{4} \le t < \frac{T}{2}$

4) Calculer a_0.

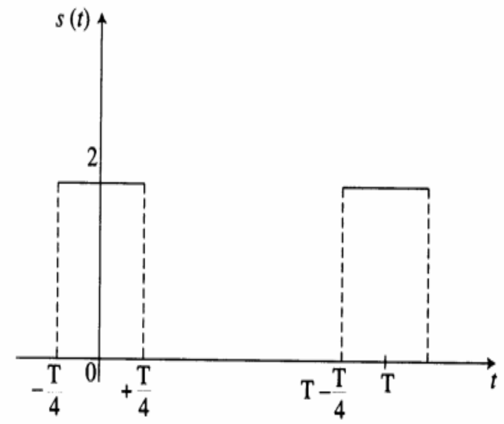
Calculer, pour tout entier n strictement positif (n > 0), la valeur du coefficient de Fourier a_n du signal u.

5) Indiquer ce que représente le nombre a_0 pour le signal u.

(D'après Bac Pro Maintenance audiovisuel électrique Session 1996)

Exercice 5

La transmission d'un signal s est une suite périodique d'impulsions rectangulaires de durée $\frac{T}{2}$ défini par la fonction notée également s, représentée ci-dessous et de période T.



$$s(t) = 2 \text{ si } -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$$

$$s(t) = 0 \text{ si } \frac{T}{4} < t < T - \frac{T}{4}$$

Les coefficients de Fourier a_n et b_n sont donnés, pour tout $n \geq 1$ par :

$$a_n = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{4}; \quad b_n = 0.$$

1) Exprimer l'amplitude C_n de la raie d'ordre n du spectre du signal pour $1 \leq n \leq 5$.

2) Effectuer une représentation graphique du spectre de raies.

(*D'après sujet de Bac Pro MRBT Session 1991*)

Exercice 6

Soit V, la tension périodique de période T, telle que :

$$\text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad V(t) = 5 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$\text{si } \frac{T}{2} < t \leq T, \quad V(t) = 0$$

1) Représenter graphiquement cette tension pour $0 \leq t \leq 2T$ dans un repère orthonormal tel que : en abscisse, 6 cm représentent une période ; en ordonnée, l'unité graphique est le cm.

2) Déterminer les coefficients de Fourier a_0, a_1, b_1 de la fonction V.

3)a) Calculer l'intégrale $E = \frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)\,dt$ qui représente l'énergie moyenne du signal sur une période.

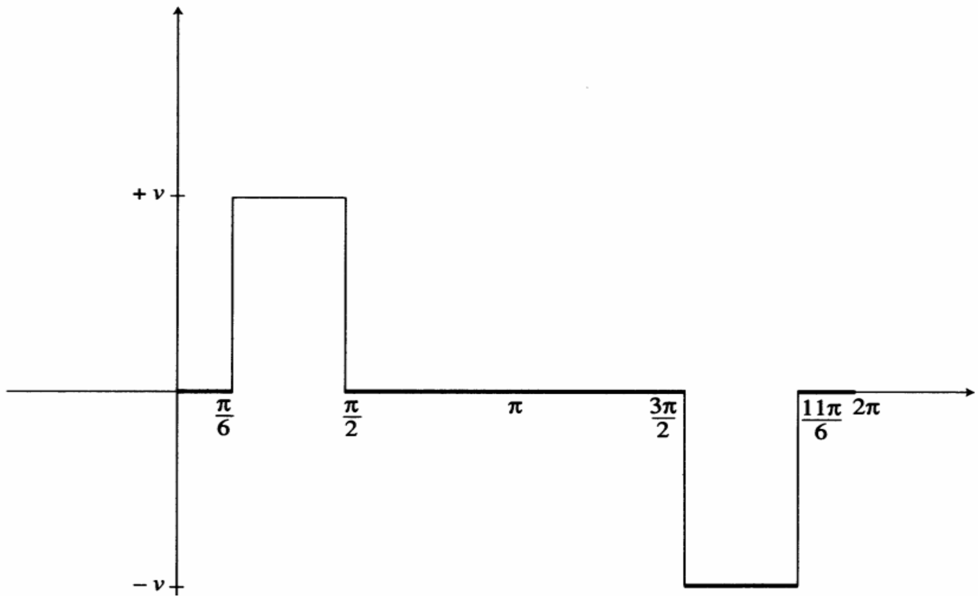
b) Calculer le nombre $E_1 = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2\right)$ qui représente l'énergie moyenne transmise sur une période par le fondamental et la première harmonique.

c) Calculer $\frac{E_1}{E}$.

(*D'après sujet de Bac Pro Maintenance audiovisuel électronique Session 1992*)

Exercice 7

Un signal s, de période $T = 2\pi$, est représenté par une fonction f dont la courbe représentative est donnée sur l'intervalle $\left[0\ ;2\pi\right]$.



1) a) Représenter f sur $\left[-2\pi\ ;2\pi\right]$.

b) A partir de la représentation graphique, étudier la parité de f.

2) a) Montrer, par exemple par des considérations d'aires, que a_0 et a_n sont nuls pour tout entiers n.

b) Montrer que l'on a :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(t\right)\ \sin\left(nt\right)dt = \frac{2V}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\left(nt\right)dt$$

c) Calculer $b_1$et b_2.

d) En déduire le polynôme trigonométrique d'ordre 2 associé au signal.

Exercice 8

Le polynôme de Fourier d'ordre n d'un signal périodique est donné par :

$$P_n(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + ... + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

Un signal temporel s est périodique, de période T. Le polynôme de Fourier d'ordre 5 associé à ce signal est le suivant :

$$P_5(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(100\pi t) - \frac{4}{9\pi}\cos(300\pi t) - \frac{4}{25\pi}\cos(500\pi t)$$

1) <u>Exploitation du polynôme de Fourier d'ordre 5 : $P_5(t)$</u>

a) Quel terme représente l'harmonique fondamentale ?

b) En déduire la pulsation ω, la fréquence f et la période T du signal.

c) Quelle est la composante continue a_0 de ce signal ?

d) Identifier les coefficients de Fourier : a_k *et* b_k pour k variant de 1 à 5.

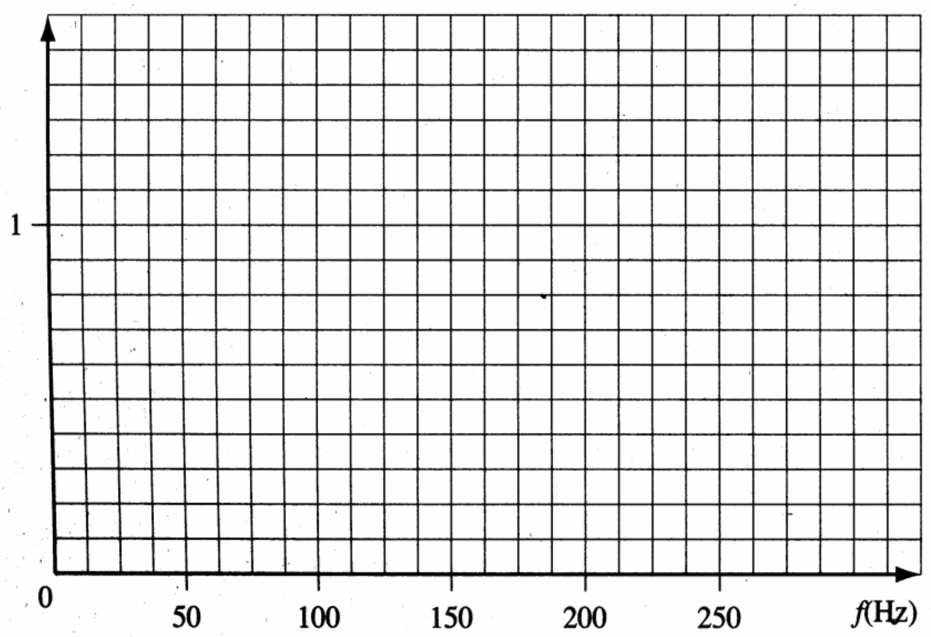
2) Représentation spectrale

a) Calculer l'amplitude des raies spectrales C_k pour k variant de 1 à 5.

b) Construire sur le graphique ci-dessous la représentation spectrale du signal pour les fréquences comprises dans l'intervalle [0 ; 250 Hz].

On rappelle que l'amplitude de la raie d'ordre k est donnée par la relation :

$$C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$



3) Énergie du spectre E_s

Calculer l'énergie transportée par les 5 premiers harmoniques du spectre : E_5

Donner le résultat avec une précision de 10^{-3}.

Formule de Parseval :

$$E_n = a_0 + \frac{1}{2}\left[a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_k^2 + b_k^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2\right]$$

4) Énergie du signal E

Sur une période ce signal est défini par :

$s(t) = -100\pi t$ si $t \in [-0,01 \ ; \ 0[$

$s(t) = +100\pi t$ si $t \in [0 \ ; \ 0,01[$

Le temps est exprimé en secondes.

L'énergie du signal est donnée par l'intégrale : $E = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t)dt$

a) Calculer E.

Montrer que sa valeur approchée à 10^{-3} près est 3,290 J.

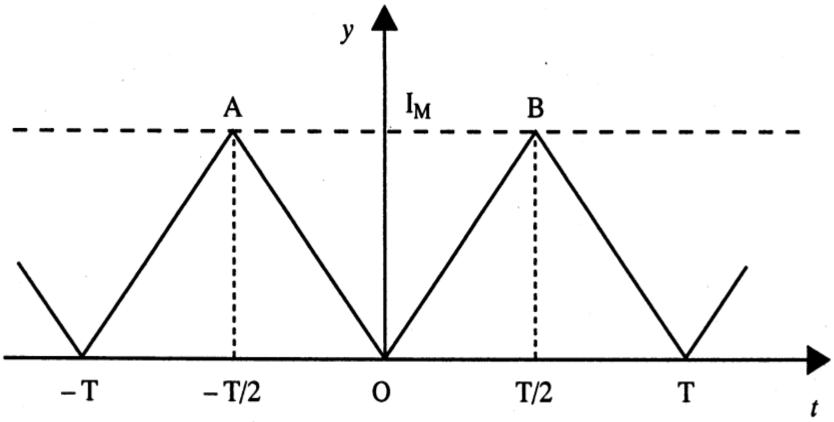
b) Calculer $\dfrac{E_s}{E}$

Quelle est, en pourcentage, l'énergie relative transportée par les 5 premiers harmoniques du spectre ?

(D*'après sujet deBac Pro Maintenance réseaux bureautique télématique session septembre 2001*)

Exercice 9

Les nombres T et I_M sont deux nombres strictement positifs donnés.



Le diagramme ci-dessus est la représentation graphique, dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot, Oy), du signal i sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

La représentation graphique du signal i considéré sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}\ ;\ \frac{T}{2}\right]$ est constitué des deux segments de droite [AO] et [OB] tels que :

- le point A a pour coordonnées $\left(-\frac{T}{2}\ ;\ I_M\right)$,
- le point B est le point symétrique du point A par rapport à l'axe (Oy).

1) Indiquer quelle est la parité du signal i. Justifier votre réponse.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto i(t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

2.1) Montrer que g est une fonction impaire. T

2.2) En admettant que $\int_{-T/2}^{0} g(t)\,dt = -\int_{0}^{T/2} g(t)\,dt$, calculer la valeur du coefficient de Fourier b_1 de i sachant que :

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i(t)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

3.1) Pour tout t de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{T}{2}\right]$ donner une expression algébrique de $i(t)$ en fonction de t.

3.2) Calculer le coefficient de Fourier a_0 de i sachant que :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} i(t)\,dt$$

4.1) Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto i(t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ est une fonction paire.

4.2) En admettant que $\int_{-T/2}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{T/2} f(t)\,dt$, montrer que :

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt$$

4.3) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto \frac{2\times I_M}{T}\left[\frac{T}{2\pi}t\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]$$

est une fonction primitive de la fonction f définie précédemment.

4.4) Calculer la valeur exacte du coefficient de Fourier a_1 de i sachant que :

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i(t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

(D*'après sujet de Bac Pro M.A.V.E.L.E.C. Session 1998*)

Exercice 10

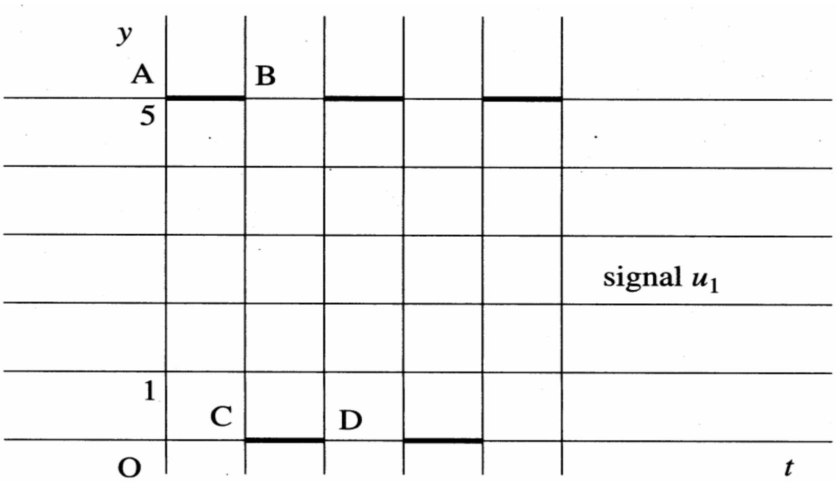
Partie I (*D'après une étude du signal de commande d'un moteur cabestan*).

T désigne le nombre $\frac{1}{24\ 000}$.

Partie A

Dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot, Oy) d'unités graphiques 48 000 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée, le signal u_1 de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T, admet comme représentation graphique sur l'intervalle [0 ; T] l'ensemble constitué du segment de droite [AB] et du segment de droite [CD] privé des points C et D tels que :

$$\begin{cases}\text{le point } A \text{ a pour coordonnées } (0\ ;\ 5)\\ \text{le point } B \text{ a pour coordonnées } (0{,}5t\ ;\ 5)\\ \text{le point } C \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur l'axe } (Ot)\\ \text{le point } D \text{ est le point de l'axe } (Ot) \text{ d'abscisse } T.\end{cases}$$



1) Calculer la valeur moyenne m_1 , du signal u_1, sur l'intervalle [0 ; T].

On rappelle que la valeur moyenne du signal s sur l'intervalle [a ; b] est égale à $\frac{1}{b-a}\int_a^b s(t)\,dt$.

2) Calculer les coefficients de Fourier a_1 *et* b_1 du signal u_1 périodique de période T sachant que :

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T u_1(t)\,\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T u_1(t)\,\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

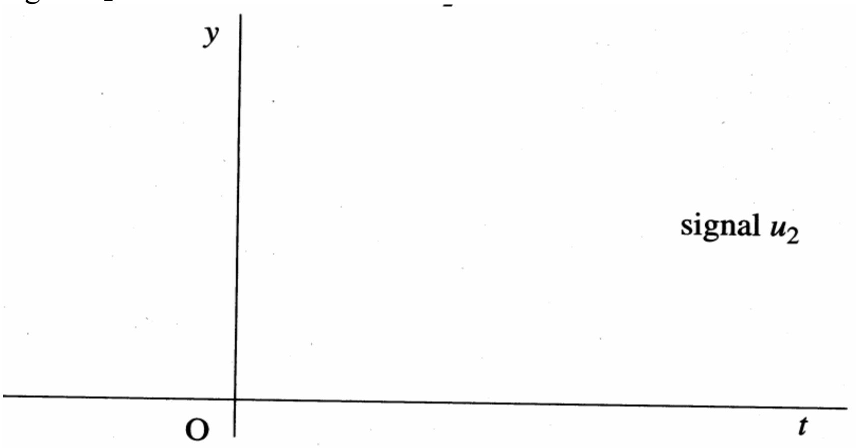
(donner les résultats demandés arrondis à 10^{-1}).

Partie B

1) Soit le signal u_2 de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T tel que :

$$\begin{cases} u_2(t) = 5 \text{ pour } 0 \leq t \leq 0{,}4T \\ u_2(t) = 0 \text{ pour } 0{,}4T < t < T \end{cases}$$

1.1) Sur la figure ci-dessous, tracer dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy) la représentation graphique du signal u_2.

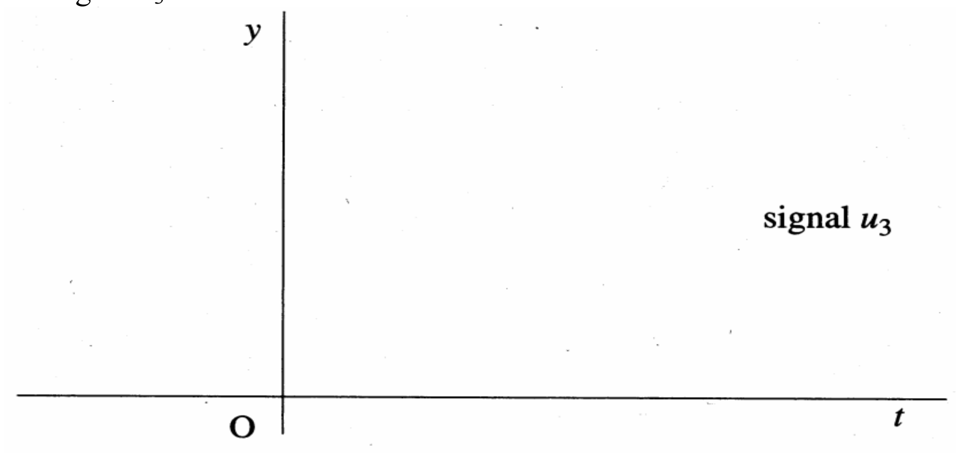


1.2) Calculer la valeur moyenne m_2 du signal u_2 sur l'intervalle [0 ; T].

2) Soit le signal u_3 de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T tel que :

$$\begin{cases} u_3(t) = 5 \text{ pour } 0 \leq t \leq 0{,}6T \\ u_3(t) = 0 \text{ pour } 0{,}6T < t < T \end{cases}$$

2.1) Sur la figure ci-dessous, tracer dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy) la représentation graphique du signal u_3.



2.2) Calculer la valeur moyenne m_3 du signal u_3 sur l'intervalle [0 ; T].

3) Le signal u est tel que :

pour tout t de l'intervalle [0 ; 200T]	$u(t) = u_1(t)$
pour tout t de l'intervalle [200T ; 600T]	$u(t) = u_2(t)$
pour tout t de l'intervalle [600T ; 1 200T]	$u(t) = u_3(t)$

Sachant que :

$$\frac{1}{1200T}\int_0^{1200T} u(t)dt = \frac{1}{1200T}\int_0^{200T} u_1(t)dt + \frac{1}{1200T}\int_{200T}^{600T} u_2(t)dt + \frac{1}{1200T}\int_{600T}^{1200T} u_3(t)dt$$

et que

$$\frac{1}{1200T}\int_0^{200T} u_1(t)dt = \frac{m_1}{6} \quad ; \quad \int_{200T}^{600T} u_2(t)dt = \frac{m_2}{3} \quad ; \quad \frac{1}{1200T}\int_{600T}^{1200T} u_3(t)dt = \frac{m_3}{2}$$

calculer la valeur moyenne du signal u sur l'intervalle [0; 1 200T] (donner la valeur exacte).

Partie II Étude et représentation d'un signal

On considère le signal s de la variable t défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$s(t) = 10 + 9\cos(10\omega t) + \cos(30\pi t)$$

1) Le signal s est la somme des trois signaux élémentaires f, g et h de la variable t définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$f(t) = 10 \ ; \ g(t) = 9\cos(10\pi t) \ \text{ et } \ h(t) = \cos(30\pi t).$$

Déterminer la période du signal sinusoïdal g, ainsi que celle du signal sinusoïdal h. Montrer que la période du signal g est aussi une période du signal s.

2) Montrer que le signal s est un signal pair.

3) Montrer que, pour tout nombre t réel, $0 \leq s(t) \leq 20$

4) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
Valeur arrondie de $s(t)$ à 10^{-2}											

5.1) Déterminer le signal dérivé s' du signal s.

5.2) En sachant que, pour tout nombre réel t,

$$\sin(30\pi t) = \sin(10\pi t)\cos(20\pi t) + \sin(20\pi t)\cos(10\pi t)$$

et

$$\sin(20\pi t) = 2\sin(10\pi t)\cos(10\pi t)$$

montrer que, pour tout t réel,

$$\sin(30\pi t) = \sin(10\pi t)\cos(20\pi t) + 2\sin(10\pi t)\cos^2(10\pi t)$$

et

$$s'(t) = (-30\pi\sin(10\pi t))(2\cos^2(10\pi t) + \cos(20\pi t) + 3)$$

5.3) Vérifier que, pour tout t réel, $(2\cos^2(10\pi t) + \cos(20\pi t) + 3) \geq 2$; en déduire que, pour tout t réel, le signe de $s'(t)$ est le même que le signe de $(-\sin(10\pi t))$.

5.4) Pour tout t de l'intervalle [0 ; 0,1], étudier le signe de $\sin(10\pi t)$.

5.5) Déduire de ce qui précède le sens de variation, sur l'intervalle [0 ; 0,1], du signal s (justifier la réponse donnée).

6) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ox, Oy) d'unités graphiques 50 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées, représenter graphiquement le signal s considéré sur l'intervalle [- 0,1 ; 0,2].

(*D'après sujet de Bac Pro M.A.V.E.L.E.C. Session 1999*)