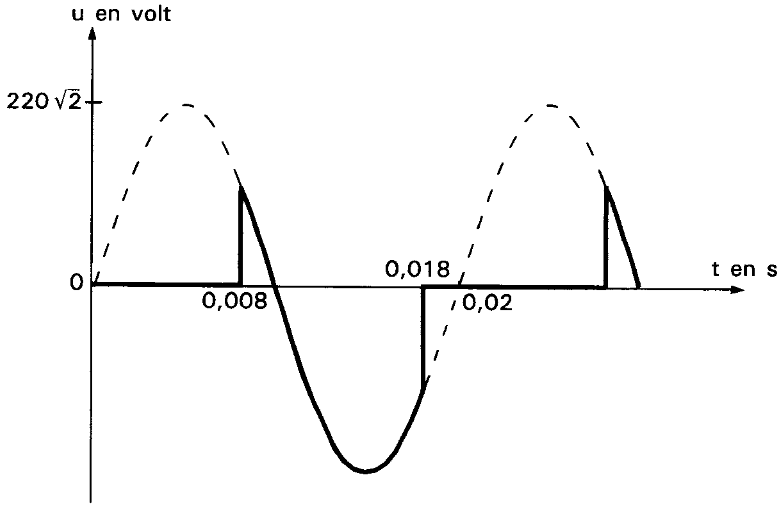
EXERCICES SUR LES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Exercice 1

La figure ci-dessous est l'oscillogramme obtenu aux bornes d'un ondulateur.



1) Quelle est la période T du signal observé ?

2) En déduire sa pulsation ω.

3) La fonction de base étant la fonction u définie par : $u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$

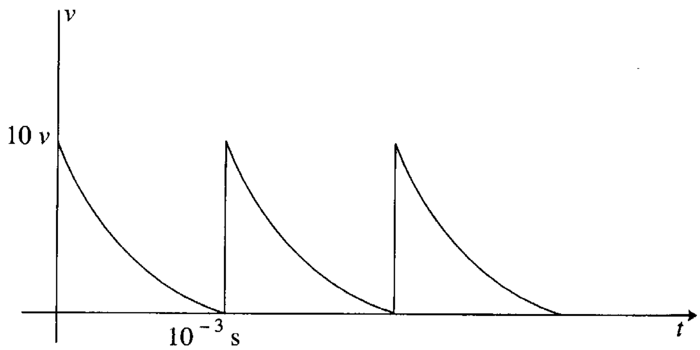
Calculer la valeur moyenne $\overline{u}$ du signal, soit

$$\overline{u} = \frac{1}{T}\int_{0,008}^{0,018} 220\sqrt{2}\sin(\omega t)\,dt$$

(*D'après sujet de Bac Pro EIE Session 1993*)

Exercice 2

Le graphique ci-dessous représente la différence de potentiel v *à* la sortie d'un redresseur. Il s'agit d'une fonction périodique, de période $T = 10^{-3}\,s$ que l'on peut exprimer pour $0 \le t \le T$ par : $v(t) = 10e^{-10^4 t}$.



Calculer la valeur moyenne V_{moy} de cette tension.

Exercice 3

1) À la réception un signal est de la forme $y = u\sin(\omega t)$ avec $\omega = 4\pi \times 10^6$ rad/s .
L'amplitude u est une fonction exponentielle du temps définie par :

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{-10^6 t}$$

a) Donner le tableau de variation de la fonction u dans l'intervalle $\left[0\ ; 5\times 10^{-6}\right]$

b) Tracer la courbe représentative C de u sur cet intervalle dans un repère orthogonal d'unités :
4 cm pour 10^{-6} s sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 V sur l'axe des ordonnées.

c) Construire la courbe symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.

2) Soit w la fonction de la variable réelle t, définie par :

$$w(t) = \sin\left(4\pi \times 10^6 t\right)$$

a) Déterminer la période T' du signal associé à cette fonction.

b) Compléter le tableau suivant :

t	0	$T'/4$	$T'/2$	$3T'/4$	T'
$u(t) = \frac{1}{2}e^{-10^6 t}$					
$w(t) = \sin\left(4\pi \times 10^6 t\right)$					
$s(t) = u(t)\cdot w(t)$					

c) A partir des valeurs numériques précédentes donner l'allure de la courbe représentative du signal amorti s défini par $s(t) = u(t)\cdot \sin t$

3) Soit $S = \int_0^{5\times 10^{-6}} \frac{1}{2}e^{-at}\sin(\omega t)\,dt$ avec $a = 10^6$ et $\omega = 4\pi 10^6$.
On admettra qu'une primitive de la fonction s peut s'écrire :

$$S(t) = \frac{1}{2}e^{-at} \times \left[\frac{a}{a^2+\omega^2}\sin(\omega t) + \frac{\omega}{a^2+\omega^2}\cos(\omega t)\right]$$

Calculer S.

(*D'après sujet de Bac Pro Maintenance des réseaux bureautiques et télématiques Session 1992*)

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par:

$$f(x) = \cos^2 x - \cos x \qquad (x \text{ est exprimé en radians})$$

1) Étudier la parité de f.

2.1) Calculer la dérivée $f\,'$ de la fonction f.
On montrera que $f\,'$ peut s'écrire $f\,'(x) = \sin x(1 - 2\cos x)$

2.2) Montrer que $f\,'$ s'annule sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ pour la valeur $x = \dfrac{\pi}{3}$.

2.3) Étudier le signe de 1 - 2cos$x$ sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

2.4) En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ \pi[$.

2.5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ \pi[$.

3) On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques telles que :
sur l'axe des abscisses 10 cm représentent π et sur l'axe des ordonnées 5 cm représentent 1.

Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe C en son point d'abscisse $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Tracer cette tangente et sans autre calcul tracer la tangente au point de la courbe d'abscisse $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

4) En utilisant les résultats des questions précédentes tracer la courbe représentative de f, pour x décrivant l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, dans le repère défini plus haut. En déduire le tracé du signal sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

(*D'après sujet de Bac Pro Maintenance des réseaux bureautiques et télématiques*)

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[0\ ,\ \pi]$ par : $f(x) = 2 - (1 + \cos x)$

1) Calculer la dérivée $f\,'$ de la fonction f.

2) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthononnal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique: 4 cm sur chaque axe).

a) Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Tracer $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ dans le repère donné.

Que se passe-t-il pour la courbe au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$?

3) On considère le domaine plan, ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient :

$$0 \le x \le \pi \quad \text{et} \quad 0 \le y \le f(x)$$

Calculer, en cm^2, l'aire de ce domaine.

(*D'après sujet de Bac Pro EIE Session 1991*)

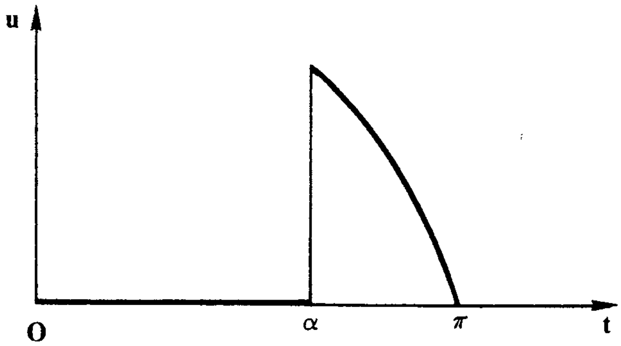
Exercice 6

Un variateur de vitesse est équipé d'un pont de puissance mixte qui délivre le signal $u(t)$ ci-dessous. Un nombre α, vérifiant $0 < \alpha < \pi$, étant donné, la fonction u est périodique, de période π, définie sur une période par :

si $\quad 0 < t < \alpha \quad u(t) = 0$

et si $\quad \alpha \leq t \leq \pi \quad u(t) = \widehat{U} \sin t$

avec $\quad \widehat{U} = 6,28$



1) Calculer la valeur moyenne de ce signal en fonction de α.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction périodique f, de période T est donnée par la relation :

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

On a donc dans ce cas :

$$\overline{u} = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\pi u(t)dt$$

(*D'après sujet de Bac Pro EIE Session 1991*)