



EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes et donner la constante.

- a) $y' - 3y = 0$ avec $f(0) = \frac{1}{2}$
- b) $y' + y = 0$
- c) $2y' + y = 0$ avec $f(1) = 1$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $2y'' + 3y = 0$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 2 = 0$

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$

Exercice 6

Un condensateur de capacité C , portant une charge Q , est déchargé dans une bobine d'inductance L , et de résistance négligeable. On note $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t . L'intensité du courant dans le circuit est donnée par :

$$i(t) = q'(t)$$

La charge du condensateur vérifie l'équation différentielle : $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$

Dans cet exercice, $C = 1,25 \mu\text{F}$ et $L = 8 \text{ mH}$ (on rappelle que $\omega^2 = \frac{1}{LC}$).

- 1) Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire : $q'' + 10^8 q = 0$
- 2) Calculer la fréquence des oscillations électriques dans le circuit
- 3) Résoudre l'équation différentielle.

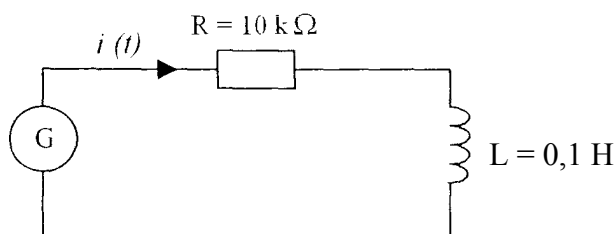
(D'après sujet de Bac Pro Maintenance Réseaux Bureautique Télématicque Session juin 2001)



Exercice 7

On s'intéresse à la variation de l'intensité $i(t)$ du courant dans un circuit R, L quand la tension d'alimentation passe de 10 V à 0 V.

Cette étude permet d'obtenir graphiquement la valeur de la constante de temps du circuit et de calculer quantité d'électricité Q libérée par la bobine entre deux instants.



1) L'intensité du courant $i(t)$ qui parcourt ce circuit est une fonction du temps t ($t > 0$). Elle vérifie l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$10^{-1} \times i'(t) + 10^4 \times i(t) = 0 \quad (1) \text{ où } i' \text{ est la dérivée de la fonction } i.$$

a) Ecrire l'équation différentielle (1) sous la forme : $i'(t) - a i(t) = 0$ où a est une constante à déterminer.

b) Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

c) Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle qui vérifie la condition initiale $i(0) = 10^{-3}$.

2) Soit la fonction i définie sur l'intervalle $[0 ; 3 \times 10^{-5}]$ par $i(t) = 10^{-3} \times e^{-10t}$.

a) Montrer que $i'(t) = -100 \times e^{-10t}$ où i' est la dérivée de la fonction i .

b) Donner le signe de $i'(t)$. Justifier

En déduire le sens de variation de la fonction i sur l'intervalle $[0 ; 3 \times 10^{-5}]$.

c) Compléter le tableau de valeurs. Arrondir les valeurs de $i(t)$ à $0,1 \times 10^{-4}$.

t	0	$0,2 \times 10^{-5}$	$0,5 \times 10^{-5}$	10^{-5}	2×10^{-5}	3×10^{-5}
$i(t)$		$8,2 \times 10^{-4}$			$1,4 \times 10^{-4}$	

3) On note C la courbe représentative de la fonction i dans un repère orthogonal.

On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

a) Calculer $i'(0)$. En déduire le coefficient directeur de la tangente T.

b) Représenter sur le repère, la tangente T en justifiant son tracé, puis la courbe C

c) Par lecture graphique, donner la valeur t_0 de l'abscisse du point d'intersection de la droite T avec l'axe des abscisses.

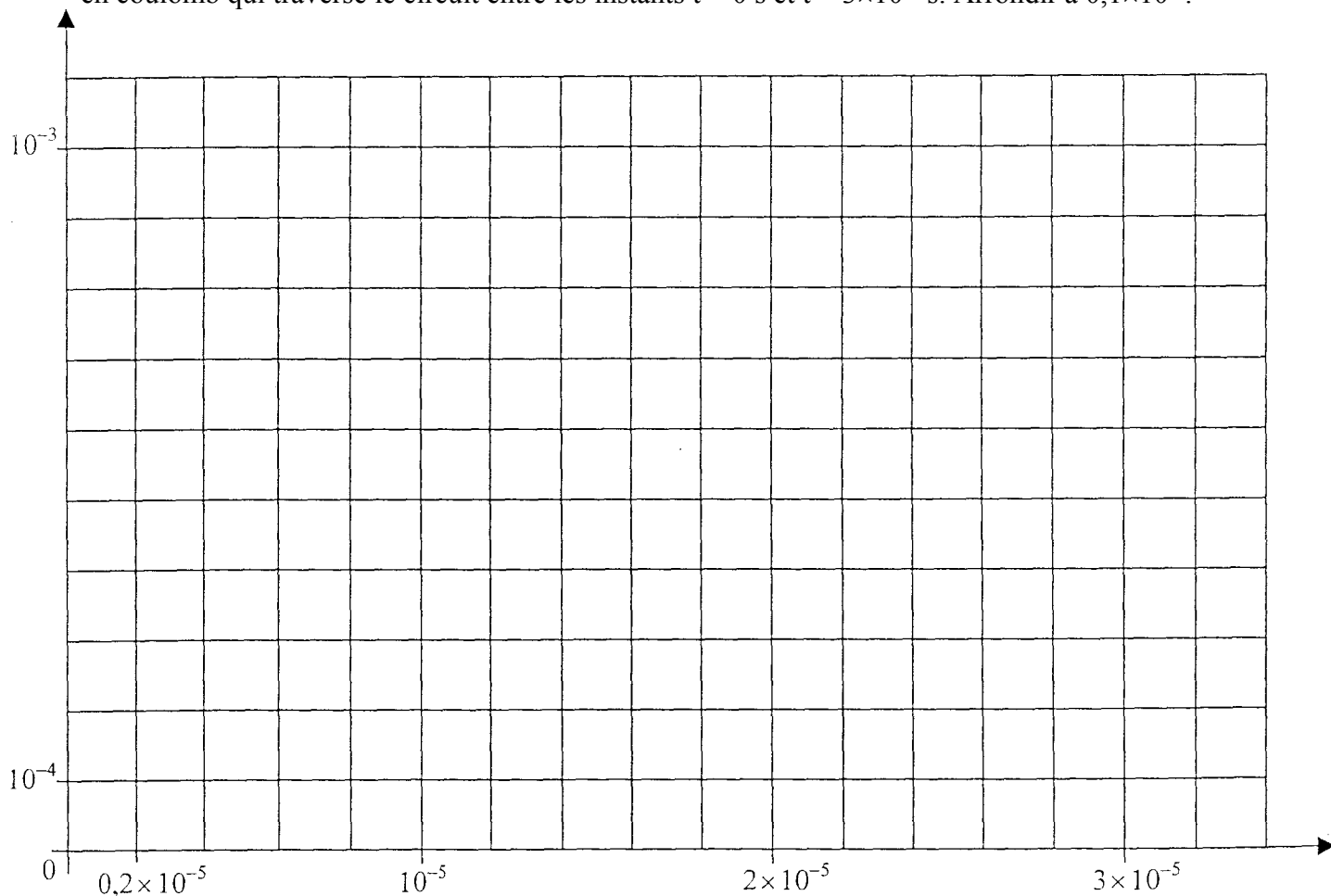


d) Calculer la valeur de la constante de temps τ du circuit.

On rappelle que $\tau = \frac{L}{R}$ (τ en seconde ; L en henry et R en ohm). Comparer cette valeur avec t_0 .

4) a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 3 \times 10^{-5}]$ par $F(x) = -10^{-8} \times e^{-10^5 x}$ est une primitive de la fonction i définie au début de la question 2.

b) Calculer le nombre Q défini par $Q = \int_0^{3 \times 10^{-5}} i(t) dt$ où Q est la quantité d'électricité exprimée en coulomb qui traverse le circuit entre les instants $t = 0$ s et $t = 3 \times 10^{-5}$ s. Arrondir à $0,1 \times 10^{-9}$.



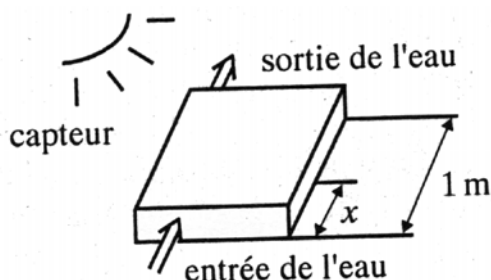
(D'après sujet de Bac Pro MAVELEC Session juin 2005)

Exercice 8

L'objectif de cet exercice est d'étudier la variation de température d'un fluide (l'eau) traversant un capteur solaire plan composé d'une plaque de métal noircie sur laquelle on a fixé des tubes où circule de l'eau.

On veut réchauffer de l'eau froide à usage sanitaire et la porter à une température de 60°C .

L'eau rentre dans le capteur à une température de 16°C .





La température θ de l'eau en un point du capteur est fonction de la distance x qui sépare ce point de l'entrée.

Le capteur ayant une longueur de 1 m, la distance x appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

Partie I

On pose $\theta = f(x)$ et on admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{0,348} y' + y = 166 \quad (1)$$

1) Déterminer les fonctions y_1 solutions de l'équation différentielle sans second membre :

$$y' + 0,348y = 0$$

2) Les solutions de l'équation différentielle (1) sont de la forme :

$$y = y_1 + 166$$

Déterminer la fonction f sachant que pour $x = 0$, la température est de 16 °C.

Partie II

On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = 166 - 150e^{-0,348x}$.

1) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et donner son signe.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

3) Reproduire et compléter le tableau suivant (les résultats seront arrondis à l'unité).

x	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1
$f(x)$							

4) Dans un repère orthogonal (1 cm pour 0,1 m en abscisse et 1 cm pour 5° C en ordonnée) tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f .

5.1) déterminer graphiquement la distance x pour laquelle la température de l'eau est supérieure ou égale à 50 °C (les traits de construction devront apparaître sur la figure).

5.2) Résoudre l'équation :

$$166 - 150e^{-0,348x} = 50$$

(on donnera les valeurs de x arrondies à 10^{-2})

6) la température moyenne $\bar{\theta}$ du fluide à l'intérieur du capteur est donnée par la relation :

$$\bar{\theta} = \int_0^1 (166 - 150e^{-0,348t}) dt$$

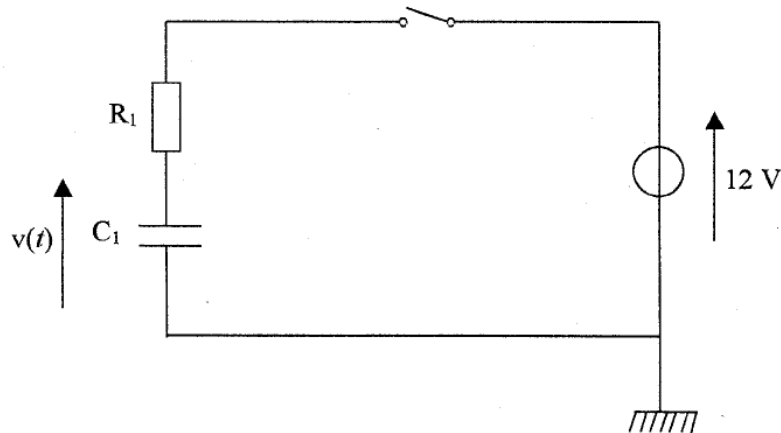
Déterminer cette température moyenne $\bar{\theta}$ arrondie à 0,1 °C.

(D'après sujet de Bac Pro Chimie énergétique Session 1998)



Exercice 9

On considère le circuit dont le schéma est représenté ci-dessous :



Ce circuit comprend en série, un condensateur de capacité $C_1 = 10^{-7} \text{ F}$, un dipôle résistif de résistance $R_1 = 5 \times 10^3 \Omega$, un interrupteur, un générateur de tension continue égale à 12 V.

Le condensateur est initialement chargé sous une tension égale à -6 V .

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur varie en fonction du temps t .

L'étude qui suit, permet de déterminer l'expression de $v(t)$, de connaître à partir de quel instant la tension $v(t)$ devient positive et de calculer l'énergie dissipée par le dipôle résistif entre deux instants donnés.

A chaque instant t , en seconde, avec $t \geq 0$, la tension $v(t)$, en volt, vérifie la relation :

$$R_1 C_1 v'(t) + v(t) = 12 \quad (1) \text{ où } v' \text{ est la dérivée de la fonction } v.$$

1) Montrer que l'équation différentielle (1) s'écrit : $v'(t) + 2\,000v(t) = 24\,000$ (2).

2) On considère l'équation différentielle « sans second membre » (3) :

$$v'(t) + 2\,000v(t) = 0 \quad (3)$$

a) Ecrire l'équation différentielle (3) sous la forme $u'(t) - au(t) = 0$ du formulaire, où a est une constante à déterminer.

b) En déduire la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3).

3) Vérifier que la fonction constante f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 12$ est une solution particulière de l'équation différentielle (2).

4) On admet que la solution générale de l'équation différentielle (2) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3) et de la solution particulière de l'équation différentielle (2) définie à la question 3.

a) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (2).

b) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (2) qui vérifie la condition initiale $v(0) = -6$.

(D'après sujet de Bac Pro M.A.V.E.L.E.C. et M.R.I.M. Session 2003)