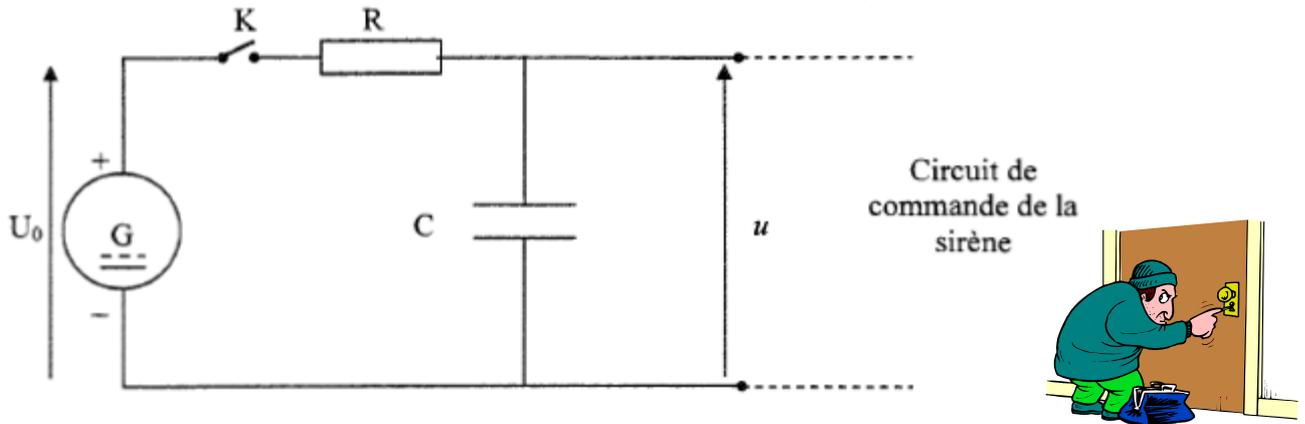




DEVOIR SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



Un circuit de commande d'une alarme de maison peut être schématisé par le circuit ci-dessous.



À la fermeture de l'interrupteur k, l'alarme est mise sous tension. Un laps de temps est nécessaire pour sortie de la maison sans déclencher l'alarme.

Partie A : Équation différentielle

À l'instant $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur k. La différence de potentiel $u(t)$ (en volt) aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle (E) ou u' est la dérivée de la fonction u :

$$RC u'(t) + u(t) = U_0 \quad (E)$$

On donne : $R = 10^6 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$ et $U_0 = 9 \text{ V}$.

1) Avec les valeurs numériques de R , C et U_0 , vérifier que l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$u'(t) + 0,02 u(t) = 0,18 \quad (E)$$

2) Déterminer les fonctions u_1 solutions générales de l'équation différentielle sans second membre (E_0)

$$u'(t) + 0,02 u(t) = 0 \quad (E_0)$$

3) Vérifier que la fonction u_2 définie par $u_2(t) = 9$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E)

4) On admet que la solution générale de l'équation différentielle (E) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle sans second membre et d'une solution particulière de l'équation différentielle,

a) Donner la solution générale de l'équation différentielle avec second membre (E).

b) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition :

$$u(0) = 0.$$



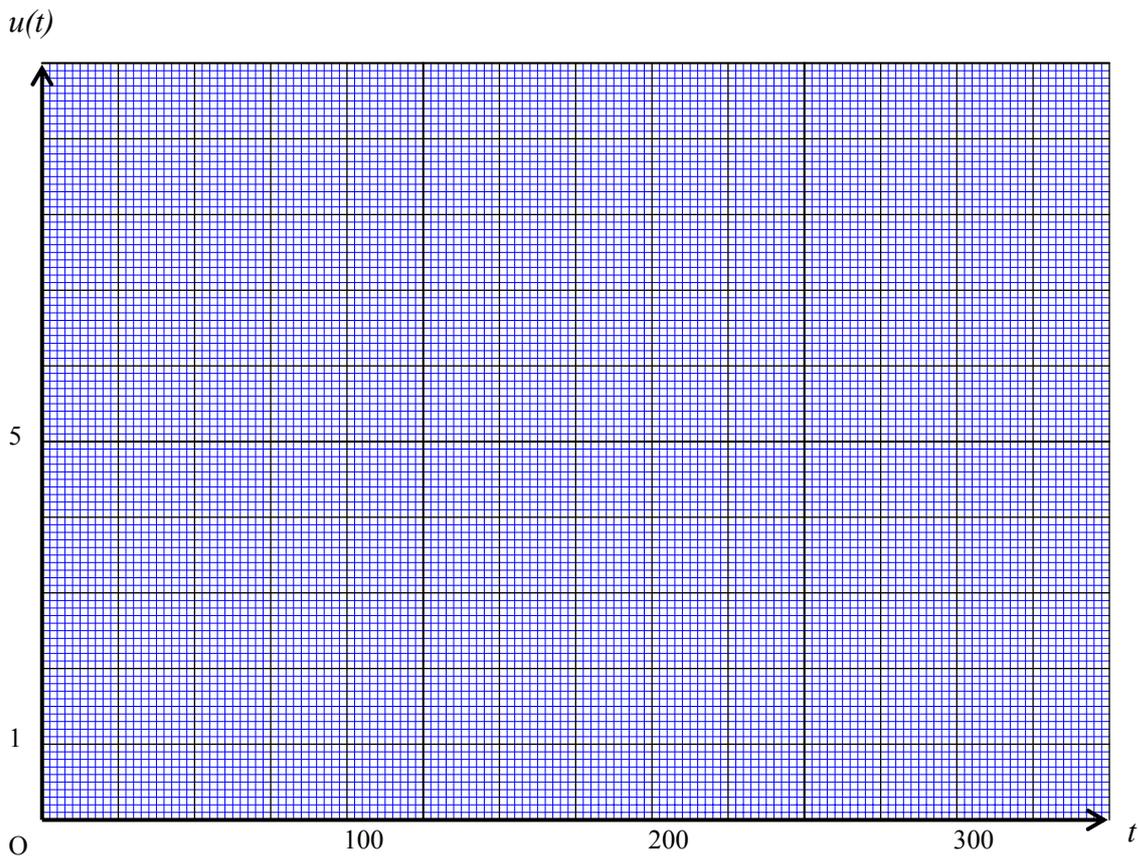
Partie B : Étude de fonction

On étudie la fonction u définie sur l'intervalle $[0 ; 300]$ par $u(t) = 9\left(1 - e^{-\frac{t}{50}}\right)$

- 1) Exprimer $u'(t)$ où u' est la dérivée de la fonction u .
- 2) a) Déterminer le signe de $u'(t)$. La réponse devra être justifiée.
b) En déduire le sens de variation de la fonction u sur un l'intervalle $[0 ; 300]$
- 3) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous. Les résultats seront arrondis au dixième.

t	0	25	50	100	150	200	300
$u(t)$			5,7		8,6		9,0

- 4) Construire la représentation graphique \mathcal{C} de la fonction u dans le repère ci-après.



- 5) a) Résoudre graphiquement l'équation $u(t) = 7,5$. Laisser apparents les traits utiles a la lecture.
b) Résoudre par le calcul l'équation $u(t) = 7,5$. Le résultat sera arrondi à l'unité.
c) La sirène de l'alarme se déclenche dès que la tension aux bornes du condensateur atteint 7,5 V. Donner le temps dont dispose une personne pour quitter la maison avant le déclenchement de la sirène

(D'après sujet de Bac Pro MRIM/SEN Session juin 2007)