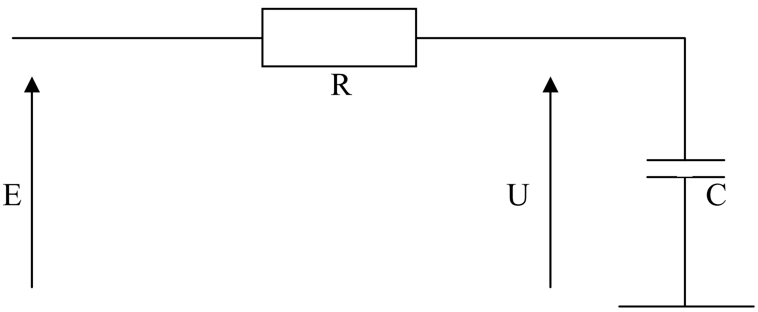
DEVOIR SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.
Le système de commande de la fonction RESET par vidéo processing sur un modèle de magnétoscope vendu dans le commerce est représenté sur le schéma ci-dessous.



avec E = 5 V
R = 1 kΩ
C = 100 nF

La tension aux bornes du condensateur, notée U sur le schéma, varie en fonction du temps t ; on la note $u(t)$ dans cet exercice.
On se place dans le cas où $u(0)= 0$ et où, à chaque instant t compris entre 0 et 10^{-3} s :

$$RC\ u'(t) + u(t) = E \qquad (1)$$

u' étant la dérivée de la fonction u.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle du premier ordre

1) Montrer qu'avec les valeurs numériques de R, C et E, l'équation différentielle (1) s'écrit :

$$10^{-4} u'(t) + u(t) = 5 \qquad (2).$$

2) On considère l'équation différentielle « sans second membre » (3) :

$$10^{-4} u'(t) + u(t) = 0 \qquad (3).$$

a) Écrire l'équation différentielle (3) sous la forme $u'(t) + a\ u(t) = 0$ où a est une constante à déterminer.

b) En déduire la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3).

3) Vérifier que la fonction constante f définie sur l'intervalle $[0\ ;10^{-3}]$ par $f(t)=5$ est une solution particulière de l'équation différentielle (2).

4) On admet que la solution générale de l'équation différentielle (2) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3) et d'une solution particulière de l'équation différentielle (2).

a) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (2).

b) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (2) qui vérifie la condition initiale $u(0) = 0$.

Partie B - Étude d'une fonction

Soit u la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 10^{-3}] par $u(t) = 5(1 - e^{-10^4 t})$

1) Montrer que $u'(t) = 5 \times 10^4 \times e^{-10^4 t}$, *où* u' est la dérivée de la fonction u.

2) Donner, en le justifiant, le signe de $u'(t)$ sur l'intervalle [0 ; 10^{-3}].

3) En déduire le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle [0 ; 10^{-3}].

4) Compléter le tableau de valeurs de la fonction u figurant ci-dessous.
Arrondir les valeurs approchées au millième.

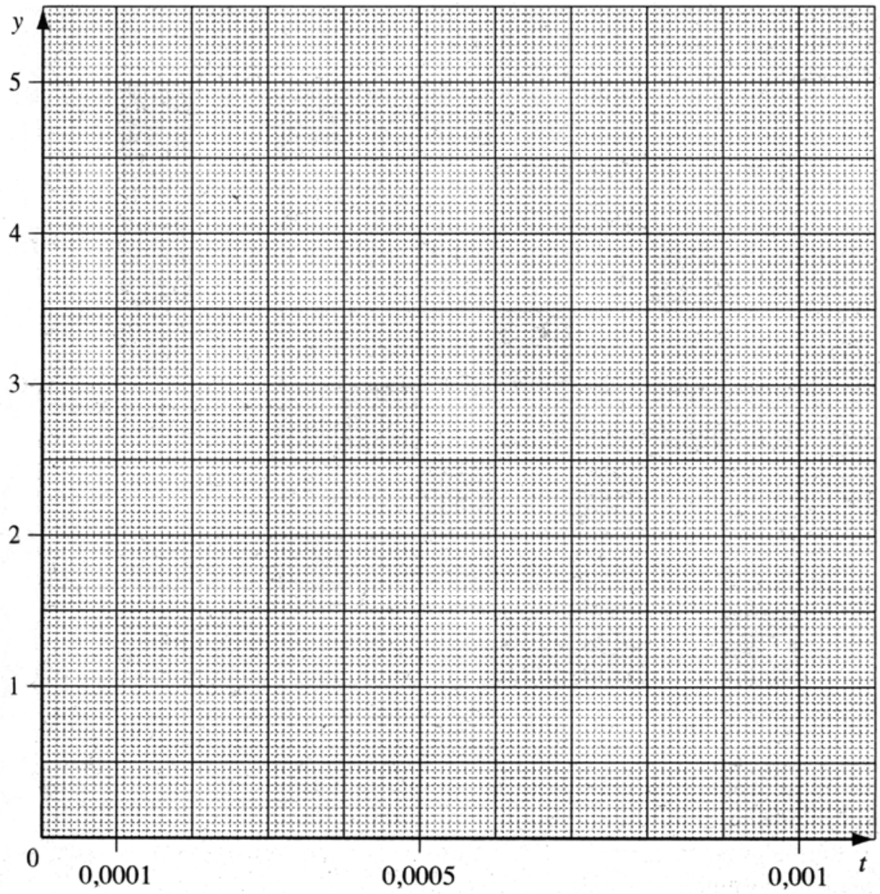
t	0	0,00005	0,0001	0,00015	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,001
$u(t)$	0		3,161			4,751	4,908	4,966	

5) Tracer, dans le repère ci-dessous la représentation graphique de la fonction u.

6) a) Montrer que, pour tout nombre t de l'intervalle [0 ; + ∞[, on a :

$$5(1 - e^{-10^4 t}) < 5$$

b) Interpréter graphiquement ce résultat à l'aide d'une phrase.



(D'après sujet de Bac Pro MAVELEC Session septembre 2001)