



EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1

Au cours de la traversée d'un milieu transparent, l'énergie lumineuse est d'une part absorbée par le milieu, d'autre part diffusée (effet Compton). La variation de flux énergétique Φ (en watts) en fonction de la longueur traversée x (en mètres) est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\mu\Phi$$

Le coefficient μ est appelé coefficient d'atténuation linéique : $\mu = 46 \times 10^{-6}$ (en m^{-1}).

- 1) Résoudre l'équation différentielle.
- 2) Déterminer sa solution vérifiant $\Phi(1000) = 14,3 \times 10^4$.

(D'après sujet de Bac Pro MRBT Session 1996)

Exercice 2

- 1) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle E : $y' - 5y = 0$.
- 2) Déterminer la solution particulière de l'équation E prenant la valeur $y(0) = 37$ pour $x = 0$.

Exercice 3

Le problème prend comme support l'étude mathématique de la charge d'un condensateur à travers une résistance, en réponse à une tension constante. Les parties A, B et C sont indépendantes.

PARTIE A

L'étude de la différence de potentiel aux bornes du condensateur mène à la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$u'(t) + 10^3 u(t) = 5 \cdot 10^3 \quad (E) \quad \text{avec } t \geq 0$$

- 1) Déterminez les fonctions u_1 solutions de l'équation différentielle sans second membre :

$$u'(t) + 10^3 u(t) = 0$$

- 2) Vérifiez que la fonction u_2 définie par $u_2(t) = 5$ est solution de l'équation différentielle avec second membre :

$$u'(t) + 10^3 u(t) = 5 \times 10^3$$

- 3) On admet que toute solution u de l'équation différentielle (E) est une fonction définie, pour $t \geq 0$, par :

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

où u_1 est l'une quelconque des fonctions trouvées dans la question 1.
Déterminez complètement $u(t)$ si $u(0) = 0$.



PARTIE B

Étude de la fonction u définie pour $t \geq 0$ par $u(t) = 5(1 - e^{-at})$ avec $a = 10^3$.

Dans cette formule t désigne le temps exprimé en secondes (s), et $u(t)$ désigne la tension exprimée en volts (V). On désigne par (C) la courbe représentative de u .

- 1) Déterminez la dérivée de la fonction u .
- 2) Étudiez le signe de la dérivée sur l'intervalle $[0 ; 5 \times 10^{-3}]$, autrement dit sur $[0 ; 5/a]$.
- 3) Dressez le tableau de variation de u sur $[0 ; 5 \times 10^{-3}]$
- 4) Déterminez une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $t_0 = 0$.
- 5) Représentez dans un repère orthogonal la tangente T et la courbe (C) pour t appartenant à $[0 ; 5 \times 10^{-3}]$. Prenez comme échelles : sur l'axe des abscisses 2 cm pour 1×10^{-3} s.
sur l'axe des ordonnées 2 cm pour 1 V.

PARTIE C

Calcul de la valeur moyenne de u avec $u(t) = 5(1 - e^{-at})$ avec $a = 10^3$.

- 1) Calculez l'intégrale $I = \int_0^{5 \cdot 10^{-3}} u(t) dt$

- On rappelle qu'une des primitives de f définie par $f(t) = e^{-at}$ est la fonction F telle que :

$$F(t) = -\frac{1}{a} e^{-at}$$

- 2) Que représente graphiquement l'intégrale I ?
- 3) Déterminez la valeur moyenne de u en volt sur l'intervalle $[0 ; 5 \cdot 10^{-3}]$

(D'après sujet de Bac Pro Maintenance des réseaux bureautiques et télématiques Session 1994)

Exercice 4

On applique entre les bornes A et B d'un circuit RC une différence de potentiel u sinusoïdale telle que : $u(t) = 10 \sin(100\pi t)$.

Les valeurs de la résistance et de la capacité sont respectivement :

$R = 1\,000$ (en Ω) ; $C = 1,85 \times 10^{-6}$ (en F).

Pendant la phase de décharge du condensateur, la loi d'évolution de la différence de potentiel y aux bornes de la résistance est donnée par l'équation différentielle :

$$y' + \frac{y}{RC} = 0$$

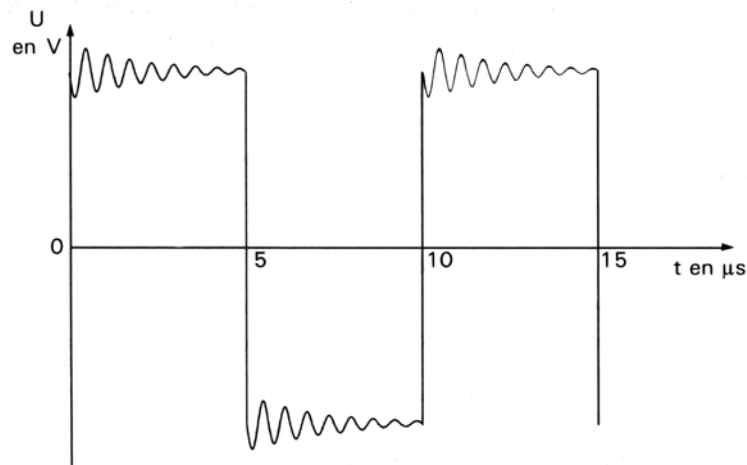
- 1) Vérifier que toute fonction y telle que $y(t) = Ke^{\frac{-t}{RC}}$ avec K constante réelle, est une solution de l'équation différentielle précédente.
- 2) Exprimer $y(t)$ dans le cas particulier où $R = 1\,000 \, \Omega$; $C = 10^{-7}$ F et $y(0) = -10$ (en V).
- 3) Calculer t pour que $y(t) = \frac{y(0)}{2}$

(D'après sujet de Bac Pro MRBT Session 1988)



Exercice 5

Lors des essais du BUS NUMERIS de la salle de commande de la centrale de production nucléaire du CRUAS, des oscillations conformes à la représentation ci-dessous ont été relevées :



La durée d'un état binaire, soit $T/2$, sera considérée comme égale à $5\mu s$. (ceci pour simplifier les calculs).

On étudiera cette oscillation autour d'une valeur moyenne dans l'intervalle $[0 ; T/2]$.

Au niveau du point de mesure, le circuit se comporte comme un circuit RLC ; on peut définir les oscillations du signal comme une variation de la charge q à l'intérieur du circuit en fonction du temps au moyen de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{dq}{dt} + 159 \cdot 10^{12} q = 0$$

1^{ère} question : Résolution de l'équation différentielle

1) L'équation différentielle ci-dessus admet pour équation caractéristique

$$r^2 + 2 \times 10^6 r + 159 \times 10^{12} = 0$$

Montrer que cette équation admet deux racines distinctes dans l'ensemble des nombres complexes. Écrire ces racines sous la forme $\alpha + j\beta$ (α et β étant réels et j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$)

2) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2 \times 10^6 y' + 159 \times 10^{12} y = 0$$

où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle t .

3) Déterminer la solution particulière q de cette équation vérifiant les conditions

$$q(0) = 0 \quad \text{et} \quad q(0,125 \cdot 10^{-6}) = 0,441$$



2^{ème} question : Étude du signal

A - A la réception le signal est de la forme $y = u \sin \omega t$ avec $\omega = 4\pi 10^6$ rad/s
L'amplitude u est une fonction exponentielle du temps définie par

$$u(t) = \frac{1}{2} e^{-10^6 t}$$

- 1) Donner le tableau de variation de la fonction u dans l'intervalle $[0 ; 5 \times 10^{-6}]$
- 2) Tracer la courbe représentative C de u sur cet intervalle dans un repère orthogonal d'unités :
4 cm pour 10^{-6} s sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 V sur l'axe des ordonnées.
- 3) Construire la courbe symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.

B - Soit w la fonction de la variable réelle t , définie par :

$$w(t) = \sin(4\pi 10^6 t)$$

- 1) Déterminer la période T' du signal associé à cette fonction.
- 2) Compléter le tableau suivant :

t	0	$T'/4$	$T'/2$	$3T'/4$	T'
$u(t) = \frac{1}{2} e^{-10^6 t}$					
$w(t) = \sin(4\pi 10^6 t)$					
$s(t) = u(t) \times w(t)$					

- 3) À partir des valeurs numériques précédentes donner l'allure de la courbe représentative du signal amorti s défini par $s(t) = u(t) \times \sin t$

3^{ème} question : Calcul d'une intégrale

$$\text{Soit } S = \int_0^{5 \cdot 10^{-6}} \frac{1}{2} e^{-at} \sin \omega t dt$$

avec $a = 10^6$ et $\omega = 4\pi 10^6$.

On admettra qu'une primitive de la fonction s peut s'écrire :

$$S(t) = \frac{1}{2} e^{-at} \left[\frac{a}{a^2 + \omega^2} \sin \omega t + \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \cos \omega t \right]$$

Calculer S .

(D'après sujet de Bac Pro Maintenance des réseaux bureautiques et télématiques Session 1992)



Exercice 6

Le condensateur de capacité C se charge à travers l'élément résistif de résistance R sous l'action d'une source de tension de force électromotrice continue E .

L'équation différentielle correspondante s'écrit :

$$(1) \quad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R} \quad \text{où } q \text{ est la charge du condensateur à l'instant } t.$$

- 1) Montrer que $q_1 = CE$ est une solution particulière de l'équation (1).
- 2) Résoudre l'équation différentielle sans second membre $q' + \frac{q}{RC} = 0$
- 3) Sachant que les solutions de l'équation $y' + ay = f(x)$ s'obtiennent en ajoutant à l'une d'entre elles toutes les solutions de l'équation différentielle sans second membre $y' + ay = 0$, écrire en utilisant les questions 1) et 2) la solution générale de l'équation différentielle (1). Que devient cette expression si à $t = 0$, on a $q = 0$?

(D'après sujet de Bac Pro Maintenance de l'audiovisuel électronique Session 1990)