



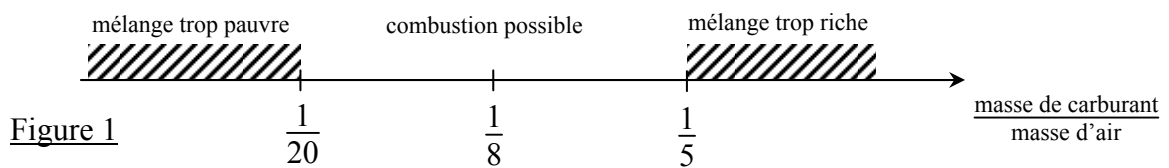
DEVOIR SUR LES FONCTIONS DÉRIVÉES

I) Présentation de la situation :

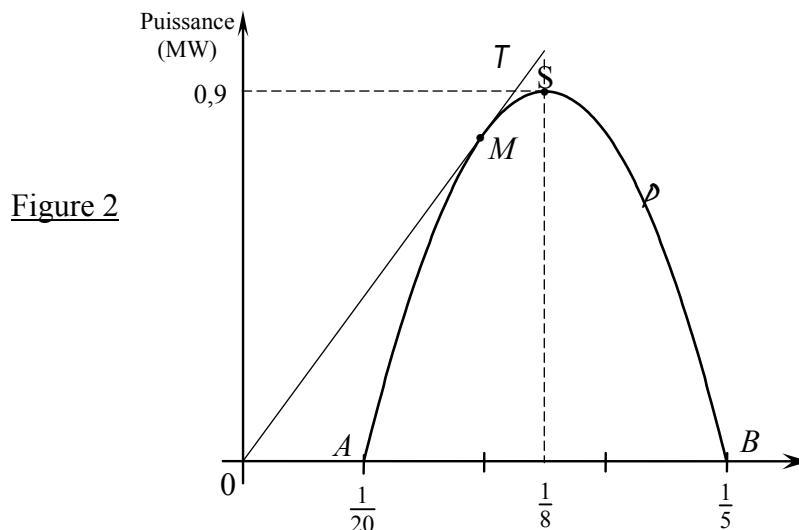
Un groupe moto-propulseur (GMP) nécessite pour son fonctionnement un dosage approprié de carburant et d'air. Le dosage s'exprime par le rapport $\frac{\text{masse de carburant}}{\text{masse d'air}}$:

par exemple, un dosage $\frac{1}{15}$ signifie que pour brûler 1 g de carburant, on utilise 15 g d'air.

La combustion est possible pour un dosage compris entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{5}$ selon le schéma ci-dessous :



Au banc d'essai, on relève l'évolution de la puissance en fonction du dosage pour obtenir la parabole $\mathcal{P}$ ci-dessous :



On remarque que la puissance maximum P_m est obtenue au point S pour un dosage de $\frac{1}{8}$.

Sa valeur est 0,9 MW. On admet que le meilleur rendement du GMP est atteint pour un dosage correspondant au point M de la courbe pour lequel la tangente passe par l'origine.

L'objectif du problème est de rechercher la valeur de ce dosage.

II) Recherche mathématique

On note x le dosage et y la puissance du GMP.

1) Sur la courbe, figure 2, relever les coordonnées des points A , B et S en exprimant ces coordonnées sous forme décimale.

2) L'équation d'une parabole passant par les points A et B est de la forme :

$$y = a(x - 0,05)(x - 0,2).$$

Sachant que la parabole $\mathcal{P}$ passe aussi par le point S , déterminer la valeur du coefficient a .



Écrire alors l'équation de cette parabole sous la forme $y = ax^2 + bx + c$.

3) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,05 ; 0,2]$ par :

$$f(x) = -160x^2 + 40x - 1,6$$

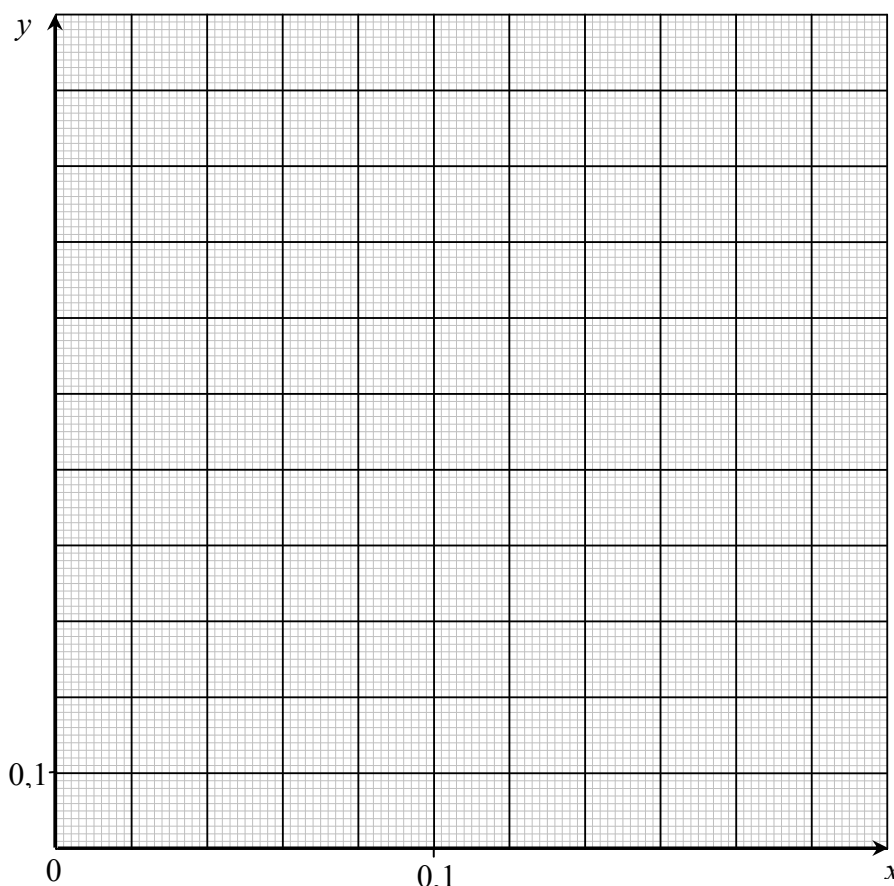
a) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f .

b) Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,05 ; 0,2]$.

c) Compléter le tableau de valeurs. Les résultats seront arrondis au centième.

x	0,05	0,06	0,08	0,10	0,125	0,16	0,18	0,20
$f(x)$								

d) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous.



4) Tracer la tangente τ à la courbe passant par l'origine. En déduire graphiquement l'abscisse x_M du point M de tangence.

5) La méthode graphique étant peu précise, on se propose de déterminer par le calcul la valeur de x_M . On montre que cette valeur est solution de l'équation : $f(x_M) = f'(x_M) \times x_M$.

a) Écrire cette équation en remplaçant $f(x_M)$ et $f'(x_M)$ par leur expression respective.

b) Montrer que cette équation conduit, en la simplifiant, à l'équation : $160x_M^2 - 1,6 = 0$.

c) Résoudre alors cette équation dans l'intervalle $[0,05 ; 0,2]$.

6) *Conclusion* : quel est le rapport $\frac{\text{masse de carburant}}{\text{masse d'air}}$ qui donne au GMP le meilleur rendement ?

(D'après sujet de Bac Pro Aéronautique Session 2004)