LES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

I) Introduction

L'écriture 3, 4, 6, 9, 13, 18 est une suite de nombres.
Le premier élément de cette suite est 3.
C'est le premier terme, on peut le noter U_1. Le cinquième terme (13) se notera U_5.

II) Suite arithmétique

1) Définitions et propriétés immédiates

Définition

Soit deux nombres réels a et r.
On appelle suite arithmétique de base a et de raison r, la suite définie par :

$$U_1 = a$$
$$U_n = U_{n-1} + r$$

Propriétés

Dans une suite arithmétique de base a et de raison r, le terme de rang n est donné par la relation : $U_n = a + (n - 1)\, r$ (si $n \geq 2$)

Propriétés

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de base a et de raison r est :

$$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) = \frac{n}{2}(2a + (n-1) \times r)$$

2) Exemple

$$1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13$$

$U_1 = 1$ soit $a = 1$ et la raison vaut 2.

Calcul de la valeur du 4ème terme

$U_n = a + (n-1) \times r$
$U_4 = 1 + (4-1) \times 2$
$U_4 = 7$

Calcul de la somme des 6 premiers termes

$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$

$S_6 = \frac{6}{2}(1+11)$

$S_6 = 36$

3) Remarques

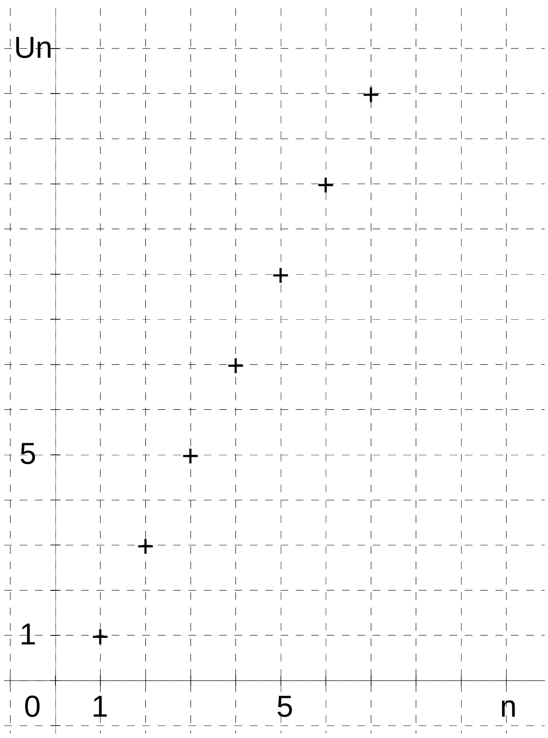
Propriétés

Soit une suite arithmétique de premier terme U_1 et de raison r :

Si $r > 0$, alors $U_{n+1} > U_n$; la suite est croissante
Si $r < 0$, alors $U_{n+1} < U_n$; la suite est décroissante

4) Représentation graphique

On peut représenter une suite dans un repère orthogonal : à chaque terme de la suite on associe un point ayant pour abscisse le rang n et pour ordonnée le nombre Un.



III) Suite géométrique

1) Définitions et propriétés immédiates

Définition

Soit deux nombres réels a et q.
On appelle suite géométrique de base a et de raison q, la suite définie par :

$$U_1 = a \;;\; U_n = U_{n-1} \times q \quad (\text{si } n \geq 2)$$

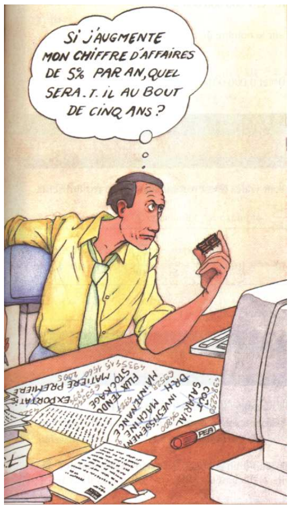
Propriétés

Dans une suite géométrique de base a et de raison q, le terme de rang n est donné par la relation : $U_n = a \times q^{n-1}$

Propriétés

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de base a et de raison q est :

$$S_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1$$



2) Exemple

Suite de base 3 et de raison 2 : $U_1 = 3$; $q = 2$

3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96

Calcul de la valeur de 5ème terme

$U_n = a \times q^{n-1}$
$U_5 = 3 \times 2^4$
$U_5 = 3 \times 16$
$U_5 = 48$

Calcul de la somme des 5 premiers termes

$S_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$ $\qquad S_5 = 3 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 3 \times \frac{-31}{-1} = 93$ $\qquad$ soit $\quad S_5 = 93$

3) Remarque

Soit une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q :

Si $U_1 > 0$ et $q > 1$, alors $U_{n+1} > U_n$; la suite est croissante.
Si $U_1 > 0$ et $0 < q < 1$, alors $U_{n+1} < U_n$; la suite est décroissante.

4) Représentation graphique

Représentation de la suite de l'exemple précédent dans un repère orthogonal :