OPÉRATIONS FINANCIÈRES A INTÉRÊTS COMPOSÉS

I) Intérêts et valeur acquise

Définition

Un capital est placé à intérêts composés lorsque le montant des intérêts produits à la fin de chaque période de placement s'ajoute au capital placé pour devenir productif d'intérêts la période suivante.
La valeur acquise C_n par le capital initial C_0 au bout de n périodes de placement est égale à :

$$\boxed{C_n = C_0\left(1+t\right)^n}$$ **avec t : taux d'intérêts sur une période**

Remarque

Le montant des intérêts acquis est la différence entre la valeur acquise et le capital placé : $i = C_n - C_0$
Les périodes de capitalisation des intérêts peuvent être le mois, le trimestre, le semestre ou l'année.
Le montant des valeurs acquises C_1, C_2, C_3, … C_n forment une suite géométrique de raison : $(1 + t)$.
Les intérêts composés sont surtout utilisés pour des placements à long terme.

Exemple

Un capital de 5 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 4 % pendant 5 ans.
La première année les intérêts se calculent sur le capital C_0 = 5000 € :
$i_1 = 5000 \times 0,04 = 200$ €
La valeur acquise de la première année est : $C_1 = 5200$ €
L'année suivante, les intérêts se calculent sur le capital $C_1 = 5200$ € :
$i_2 = 5200 \times 0,04 = 208$ €
La valeur acquise de la deuxième année est : $C_1 = 5408$ €
Ainsi de suite, la valeur acquise de la cinquième année est :
$C_5 = C_0\left(1+t\right)^n = 5000 \times 1,04^5$
soit $C_5 = 6083,26$ €.

II) Calculer le montant d'un capital placé

Méthode

Connaître la valeur acquise, le nombre de périodes, le taux périodique.
Transformer la formule :

$$C_n = C_0\left(1+t\right)^n \text{ équivaut à } C_0 = C_n\left(1+t\right)^{-n}$$

Exemple

Quel capital faut-il placer pendant 5 ans au taux de 3,5 % l'an pour obtenir une valeur acquise de 5000 € ?

$$C_n = 5000 \text{ €} \;;\; t = 3,5\ \% \;;\; n = 5 \text{ ans.}$$
$$C_0 = C_n\left(1+t\right)^{-n} = 5000 \times \left(1,035\right)^{-5} \;;$$
$$\text{soit } C_0 = 4209,87 \text{ €}.$$

III) Calculer un taux de placement

Méthode

Connaître le montant du capital placé, la valeur acquise et le taux périodique.
Transformer la formule de capitalisation :

$$C_n = C_0\left(1+t\right)^n \text{ équivaut à } \left(1+t\right)^n = \frac{C_n}{C_0}$$

$$\text{soit : } 1+t = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{d'où } t = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Exemple

Un capital de 20 000 € placé en capitalisation trimestrielle pendant 5 trimestres a une valeur acquise de 21 465,68 € au terme du placement. Calculer le taux trimestriel de placement.

$$C_0 = 20\,000 \text{ €} \;;\; C_5 = 21\,465,68 \text{ €} \;;\; n = 5 \text{ trimestres.}$$

$$\left(1+t\right)^5 = \frac{21465,68}{20000}$$

$$\text{où } \; t = \left(\frac{21465,68}{20000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

soit t = 0,014

Le taux trimestriel est de 1,4 %.

IV) Calculer une durée de placement

Méthode

Connaître le montant du capital placé, la valeur acquise et le taux périodique.
Transformer la formule de capitalisation :

$$C_n = C_0\left(1+t\right)^n \text{ équivaut à } \left(1+t\right)^n = \frac{C_n}{C_0}$$

Utiliser le logarithme népérien (ou décimal) pour déterminer la valeur de n placée en exposant :

$$\ln(1+t)^n = \ln\frac{C_n}{C_0} \text{ soit } n\ln(1+t) = \ln\frac{C_n}{C_0}$$

$$\text{d'où } n = \frac{\ln\frac{C_n}{C_0}}{\ln(1+t)}.$$

Exemple

Un capital de 41 000 € placé à intérêts composés à capitalisation mensuelle au taux de 0,5 % le mois. Au terme du placement sa valeur acquise est 44 185 €.
Calculer la durée du placement.

$C_0 = 41\,000$ € ; $C_n = 44\,185$ € ; t = 0,5 % par mois.

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C_0} \quad \text{soit} \quad 1{,}005^5 = \frac{44185}{41000}$$

$$n = \frac{\ln\frac{44185}{41000}}{\ln 1{,}005} \quad \text{d'où } n = 15.$$

La durée de placement est de 15 mois.

Remarque

Le nombre n de périodes doit être un entier. Si ce n'est pas le cas, la pratique commerciale admet la généralisation de la formule des intérêts composés à une fraction de période.
Ainsi 6,5 mois = 6 mois et 15 jours.

V) Taux équivalents

Définition

Deux taux, définis sur des périodes différentes, sont équivalentes lorsque appliqués à un même capital pendant la même durée, ils produisent le même intérêt et donc la même valeur.

Remarque

Les taux proportionnels aux durées des périodes de placement ne sont pas équivalents pour le calcul des intérêts composés.
Ainsi les taux de 12 % l'an et 1 % le mois sont proportionnels. Ils ne sont pas équivalents en intérêts composés.

Exemple

Un capital de 1 000 € placé à au taux annuel de 12 % a une valeur acquise au bout d'un an de placement égale à :

$$C_1 = C_0(1+t) = 1000 \times 1{,}12 \text{ soit } C_1 = 1\,120 \text{ €}.$$

Le même capital placé en capitalisation mensuelle au taux de 0,95 % le mois acquiert au bout d'un an, soit 12 mois, la valeur :

$$C_{12} = C_0(1+t)^{12} = 1000 \times 1,0095^{12}$$

$$\text{Soit } C_{12} \approx 1\,120 \text{ €}.$$

Les deux valeurs acquises sont égales. Le taux annuel de 12 % est équivalent au taux mensuel de 0,95 %.

VI) Valeur actuelle d'un capital ou d'un effet

Définition

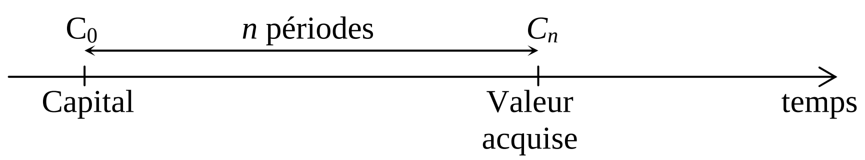
La valeur nominale d'un effet de commerce est un capital devant être payé à la date d'échéance de l'effet.
Actualiser ce capital revient à déterminer sa valeur, appelée valeur actuelle, à une date antérieure à la date d'échéance.
La valeur actuelle C_0 du capital C_n , n périodes avant la date d'échéance est égale à :

$\boxed{C_0 = C_n(1+t)^{-n}}$ **avec t : taux périodique d'actualisation ou d'escompte.**

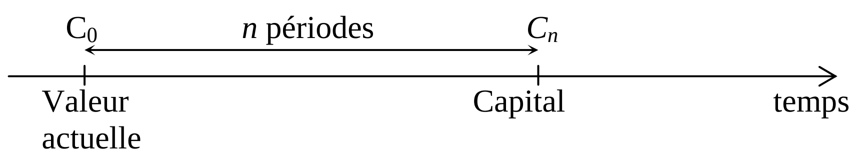
Remarque

Valeur actuelle et valeur acquise représentent l'évolution de la valeur d'un capital dans le temps.

CAPITALISATION



ACTUALISATION



Exemple

Un effet de valeur 5 000 € sera à échéance dans 8 mois. Un commerçant l'escompte au taux mensuel de 1,2 %.
La valeur actuelle de l'effet est :

$$C_0 = C_n(1+t)^{-n} = 5000 \times 1,012^{-8}$$

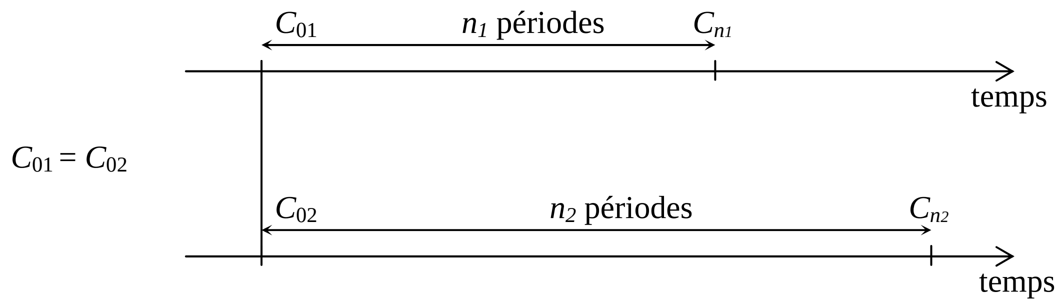
$$\text{soit } C_0 = 4\,544,92 \text{ €}.$$

Un capital, égal à la valeur actuelle, aurait au bout de 8 mois de placement une valeur acquise de 5 000 €.

VII) Equivalence de capitaux ou d'effets

Définition

Deux capitaux ou deux effets de commerce sont équivalents, à une date donnée, s'ils ont la même valeur actuelle, à un taux donné, à cette date.



Remarque

Deux groupes de capitaux ou d'effets sont équivalents si la somme des valeurs actuelles de chaque groupe est identique.
L'équivalence de capitaux, à intérêts composés, ne dépend pas de la date d'équivalence fixée.
Ainsi, un an après, les deux capitaux ci-contre ont encore même valeur actuelle, ils sont toujours équivalents.

Exemple

Un capital de 5000 € est à échéance dans 2 ans au taux de 10% l'an.

Sa valeur actuelle est : $C_{01} = C_n(1+t)^{-n} = 5000 \times 1{,}1^{-2}$ soit $C_{01} = 4132{,}23$ €.

Un autre capital de 5500 €, au même taux, est à échéance dans 3 ans.

Sa valeur actuelle est : $C_{02} = C_n(1+t)^{-n} = 5000 \times 1{,}1^{-3}$ soit $C_{02} = 4132{,}23$ €.

Les deux capitaux sont équivalents.

VIII) Calculer la valeur nominale d'un effet équivalent

Méthode

Calculer ou exprimer en fonction des données la valeur actuelle de chaque effet ou de chaque capital.
Ecrire l'équation d'équivalence : $C_{01} = C_{02}$.
Résoudre l'équation d'équivalence.

Exemple

Un effet de 14 000 € échéant dans 3 mois est remplacé par un effet dont l'échéance est fixée dans 8 mois.
Calculer la valeur nominale de l'effet de remplacement si le taux mensuel d'escompte est de 0,8 %.

La valeur actuelle du premier effet est : $C_{01} = C_{n1}(1+t)^{-n} = 14000 \times 1{,}008^{-3}$

Soit $C_{01} = 13669{,}30$ €.

La valeur actuelle du deuxième effet s'écrit : $C_{02} = C_{n2}(1+t)^{-n} = C_{n2} \times 1{,}008^{-8}$.

D'où l'équation d'équivalence : $C_{01} = C_{02}$ soit $C_{n2} \times 1,008^{-8} = 13669,30$

$$C_{n2} = \frac{13669,30}{1,008^{-8}} = 13669,30 \times 1,008^{8}.$$

La valeur nominale de l'effet de remplacement est $C_{n2} = 14569,03$ €.

IX) Déterminer une échéance commune ou une échéance moyenne.

Définition

L'échéance commune est la date d'équivalence d'un effet unique à un groupe d'effets.
A cette date, la valeur actuelle de l'effet unique est égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.
Lorsque la valeur nominale de l'effet unique de remplacement est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés, la date d'échéance se situe alors entre les dates d'échéances extrêmes des effets à remplacer, c'est une échéance moyenne.

Méthode

Calculer ou exprimer en fonction des données la valeur actuelle de chaque effet.

Ecrire l'équation d'équivalence :
La somme des valeurs actuelles des effets remplacés est égale à la valeur actuelle de l'effet de remplacement : $C_{01} + C_{02} = C_0$.

Résoudre l'équation d'équivalence dont n est l'inconnue.

Remarque

La pratique commerciale admet la généralisation de la formule aux fractions de période.

Exemple

Un effet de 15 000 € échéant dans 21 mois et un autre effet de 26000 € échéant dans 9 mois sont remplacés par un effet unique de 41000 €.
Le taux d'actualisation trimestrielle est de 3,5 %. Calculer l'échéance de l'effet de remplacement.

Les valeurs actuelles des effets remplacés sont : $C_{01} = C_n\left(1+t\right)^{-n} = 15000 \times 1,035^{-7}$

soit : $C_{01} = 11789,86$ €,

$C_{02} = C_n\left(1+t\right)^{-n} = 26500 \times 1,035^{-3}$,

soit : $C_{02} = 23901,48$ €.,

La valeur actuelle de l'effet de remplacement s'écrit : $C_0 = C_n\left(1+t\right)^{-n} = 41000 \times 1,035^{-n}$.

L'équation d'équivalence s'écrit : $11789,86 + 23901,48 = 41000 \times 1,035^{-n}$.

Soit : $1,035^{-n} = \dfrac{35691,34}{41000} = 0,870520$.

D'où : $\ln\ 1,035^{-n} = \ln\ 0,870520$,

$$n = -\frac{\ln 0,870520}{\ln 1,035} = 4,03.$$

L'échéance commune est de 4 trimestres et trois jours (0,03×90).

X) Rentabilité d'un investissement

Définition

Etudier la rentabilité d'un investissement revient à estimer les sommes qu'il rapportera et à les comparer à ce qu'il coûte.
La valeur actuelle nette (VAN) de l'investissement est la différence entre les recettes nettes actualisées engendrées par l'investissement et le montant de cet investissement.

Remarque

La valeur actuelle nette se définit le jour de l'investissement.

Les recettes nettes et la valeur résiduelle de l'investissement sont actualisées à un taux donné.

L'investissement est rentable si la valeur actuelle nette est positive.

Le taux de rentabilité interne (**TRI**) est le taux d'actualisation pour lequel la valeur actuelle nette est nulle.
Ainsi, le calcul ci après effectué avec un taux de 7,27 % donne une valeur actuelle nette pratiquement nulle.
Le **TRI** de cet investissement est 7,27 %.
Pour un taux supérieur, l'investissement n'est pas rentable.

La détermination du **TRI** se fait par encadrements successifs à partir de différents taux.
Ainsi, dans l'exemple ci-contre :
Pour t =7 % VAN = 234,50 €.
Pour t =8 % VAN = -606,88 €.
D'où 7% < **TRI** < 8%

Exemple

Une société effectue un investissement de 40 000 € dans une machine outil achetée au comptant.
Les recettes nettes attendues de cet investissement sont :
- 10000 € la 1ère année,
- 12000 € la 2ème année,
- 15000 € la 3ème année.

Au terme de la troisième année la machine outil aura une valeur résiduelle de 10 000 €.
L'investissement sera-t-il rentable pour un taux d'actualisation de 7 % l'an ?
Le jour de l'achat de la machine, les valeurs actuelles des recettes sont :
1ère année : $10000 \times 1,07^{-1} = 9345,79$ €.
2ème année : $12000 \times 1,07^{-2} = 10841,26$ €.
3ème année : $15000 \times 1,07^{-3} = 12244,47$ €.
La valeur résiduelle actualisée de la machine est égale à $10000 \times 1,07^{-3} = 8162,98$ €
La valeur actuelle nette au taux de 7% l'an est donc :
VAN = 9345,79 + 10481,26 + 12244,47 + 8162,98 – 40000
soit VAN = 234,50 €.

La valeur actuelle nette est positive, l'investissement est rentable au taux de 7%.