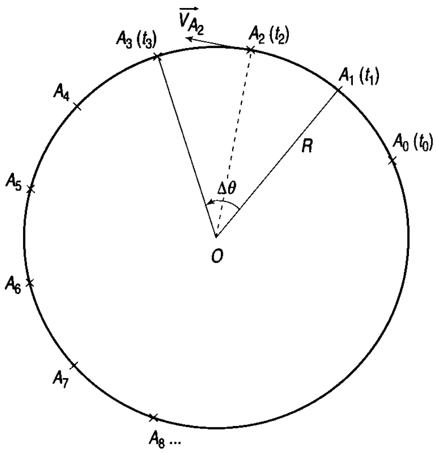
CINÉMATIQUE DU SOLIDE EN ROTATION

I) Vitesse angulaire et vitesse linéaire



La vitesse angulaire ω (« oméga ») est donnée par la relation :
$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$; elle s'exprime en radians par seconde (rad/s).

Si le solide a une fréquence de rotation de n tr/s, alors l'angle balayé par seconde est $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = 2\pi \times n$

$$\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = 2\pi \times n$$

↙ ↘

rad/s tr/s

Tous les points d'un solide en rotation uniforme ont même vitesse angulaire.

La longueur ℓ de l'arc $\overset{\frown}{A_1A_3}$ est donnée par $\ell = \Delta\theta \times R$.

La vitesse instantanée au point A_2 s'exprime donc par :

$$v_{A_2} = \dfrac{\overset{\frown}{A_1A_3}}{\Delta t} = \dfrac{\ell}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\theta \times R}{\Delta t} \quad \text{soit} \quad v_{A_2} = \omega \times R$$

$$v = \omega \times R = 2\pi \times n \times R$$

↙ ↓ ↘ ↓ ↘

m/s rad/s m tr/s m

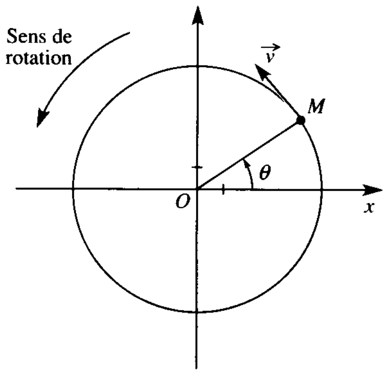
$$\omega = 2\pi n$$

↙ ↘

rad/s tr/s

II) Mouvement circulaire uniforme

La trajectoire d'un mouvement circulaire uniforme est un cercle de centre O et de rayon R.
La vitesse instantanée et la vitesse angulaire en chaque point sont constantes.
La direction du vecteur vitesse instantanée change à chaque instant.
Equations du mouvement : ω = constante
$\theta = \omega \times t + \theta_0$ θ_0 angle initial à l'instant t = 0.



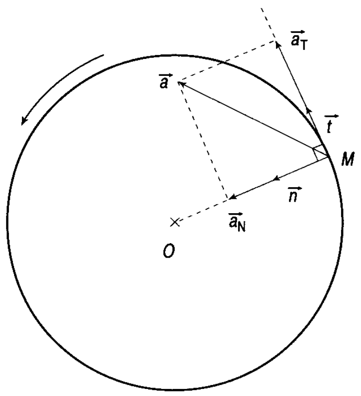
La norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ est appelée vitesse linéaire v du point M.

III) Vecteur accélération

Le repère est constitué par :
- le vecteur unitaire $\vec{n}$ porté par le rayon du cercle et orienté vers le centre du cercle ;
- le vecteur unitaire $\vec{t}$ porté par la tangente au cercle et orienté dans le sens trigonométrique.

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_N} + \overrightarrow{a_T}$$

Accélération : $\vec{a} = \underbrace{\frac{v^2}{R}\vec{n}}_{\text{accélération normale}} + \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{t}}_{\text{accélération tangentielle}}$



Cas d'un mouvement circulaire uniforme :

v = constante d'où $\frac{dv}{dt} = 0$ l'accélération tangentielle est nulle.

$v = \omega \times R$ d'où $v^2 = \omega^2 \times R^2$ soit $\boxed{\vec{a} = \omega^2 \times R\vec{n}}$

Le vecteur accélération orienté vers le centre du cercle s'appelle aussi vecteur **accélération centripète**.

IV) Mouvement circulaire uniformément varié

La trajectoire d'un mouvement circulaire uniformément varié est un cercle.
La vitesse angulaire est une fonction affine du temps.
L'accélération angulaire α est constante ; elle s'exprime en rad/s².

$$\text{rad/s}^2 \leftarrow \alpha = \frac{d\omega \;\rightarrow\; \text{rad/s}}{dt \;\rightarrow\; \text{s}}$$

Équations horaires du mouvement :

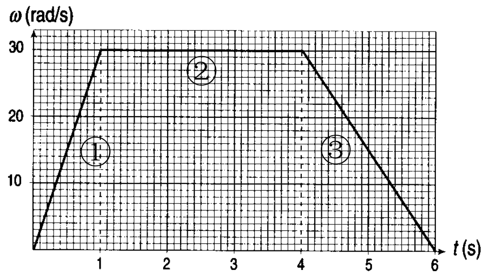
$\alpha =$ constante

$\omega = \alpha t + \omega_0$ — ω_0 vitesse angulaire initiale

$\theta = \frac{1}{2}\alpha \times t^2 + \omega_0 t + \theta_0$ — θ_0 angle initial à l'instant $t = 0$

V) Identifier la nature d'un mouvement

Le graphe des vitesses angulaires permet d'identifier la nature du mouvement.



Le graphique ci-dessus représente les variations de la vitesse angulaire ω en fonction du temps, d'un solide mobile autour d'un axe fixe.

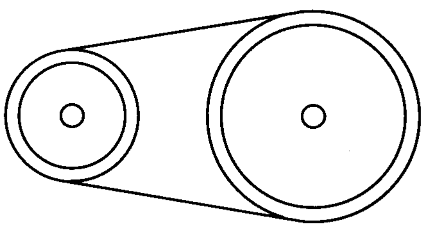
Phase ① : ω est une fonction affine du temps, le mouvement est circulaire uniformément accéléré. α est le coefficient directeur de la droite (il est positif).

Phase ② : ω est constante, le mouvement est circulaire uniforme.

Phase ③ : ω est une fonction affine du temps, le mouvement est circulaire uniformément décéléré. α est le coefficient directeur de la droite (il est négatif).

VI) Transmission de mouvements uniformes

1) Transmission par poulies-courroie



Poulie menante
diamètre : D_1
fréquence de rotation : n_1

Poulie menée
diamètre : D_2
fréquence de rotation : n_2

Vitesse linéaire de la poulie 1 : $v_1 = \pi \times D_1 \times n_1$

Vitesse linéaire de la poulie 2 : $v_2 = \pi \times D_2 \times n_2$

En supposant qu'il n'y ait pas de glissement de la courroie (en vérité il y en a toujours un de l'ordre de 2%) :

$v_1 = v_2$ soit $\pi \times D_1 \times n_1 = \pi \times D_2 \times n_2$ d'où $\frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}$

Le rapport des vitesses de rotation de deux poulies est égal au rapport inverse de leurs diamètres.

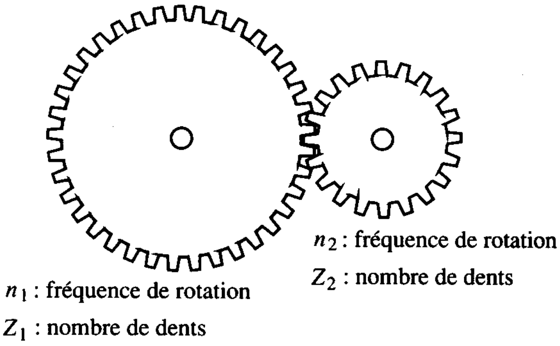
On a aussi la relation : $\boxed{n_1 D_1 = n_2 D_2}$

2) Transmission par engrenages

D : diamètre primitif (mm)

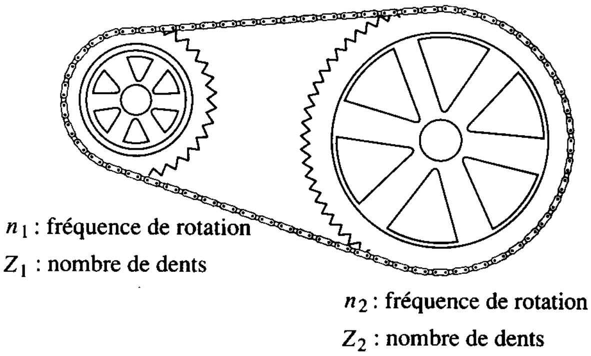
Z : nombre de dents de l'engrenage.

m : module de l'engrenage en mm. $m = \frac{D}{Z}$



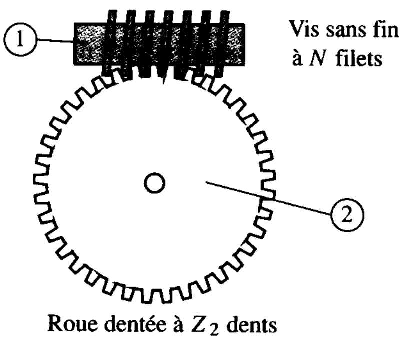
Le module est le même pour toutes les roues de l'engrenage. $\boxed{n_1 Z_1 = n_2 Z_2}$

3) Transmission par roues dentées et chaîne



$$\boxed{n_1 Z_1 = n_2 Z_2}$$

4) Transmission par roue dentée et vis sans fin



$$\boxed{n_1 N = n_2 Z_2}$$