CALCUL VECTORIEL - PRODUIT SCALAIRE

I) Vecteurs dans le plan

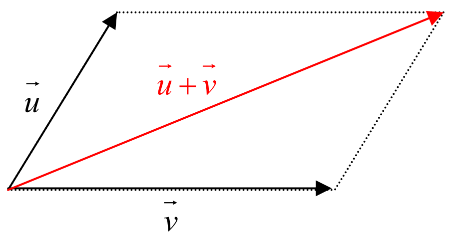
L'utilisation des vecteurs dans le plan facilite les travaux sur certaines grandeurs physiques.

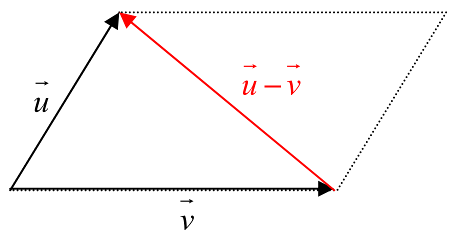
1) Définir un vecteur

- **sa direction** : la direction du vecteur $\vec{u}$ est la droite (AB).
- **son sens** : le sens du vecteur $\vec{u}$ est de A vers B.
- **sa norme** : la norme du vecteur $\vec{u}$ notée : $\|\vec{u}\|$ est la mesure de la longueur du segment [AB]

2) Réaliser la somme ou la différence de deux vecteurs

Réaliser une construction géométrique





3) Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal

Réaliser un calcul ; les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont *(x ; y)* d'où $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ou
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

4) Calculer la norme d'un vecteur dans un repère orthonormal

Remplacer les valeurs des coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ dans l'une des expressions littérales ci-dessous, puis calculer la norme du vecteur $\vec{u}$:

$$\|\vec{\mathrm{u}}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

II) Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1) Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Il faut utiliser l'une des expressions suivantes.

- Expression du produit scalaire en fonction des normes des vecteurs :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre: $\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

- Expression analytique du produit scalaire :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de coordonnées (x; y) et (x'; y') dans un repère orthonormal, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre : $x\times x'+y\times y'$

- Expression géométrique du produit scalaire :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, formant un angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre :

$$\left\|\vec{\mathrm{u}}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{\mathrm{u}}\,;\vec{v}\right)$$

Notation : $\vec{u}\cdot\vec{v}$ se lit « vecteur $\vec{u}$ scalaire vecteur $\vec{v}$ ».

Remarques : - si $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ alors l'angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est aigu

- si $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ alors l'angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est obtu

Le carré scalaire d'un vecteur est le carré de sa norme : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{\,2}=\left\|\vec{u}\right\|^2$.

2) Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ et pour tout nombre α réel :

$$\alpha\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad ; \qquad \vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

3) Montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux

Si le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ($\vec{u}\perp\vec{v}$).

III) Application du produit scalaire

Certaines questions de problèmes se résolvent à partir du calcul du produit scalaire de deux vecteurs du plan.

1) Calculer la mesure θ de l'angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ (x, y) et $\vec{v}$ (x', y') :

- Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$
- Calculer le cosinus de l'angle θ en utilisant la relation suivante

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{\mathrm{u}}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

- Calculer la mesure de l'angle θ en utilisant les touches $\boxed{\text{INV}}$ et $\boxed{\text{COS}}$

2) Déterminer une équation d'un cercle de centre *A* et de rayon *R* donné

- Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ tel que: $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = R^2$.

Si A a pour coordonnées (a, b), alors AM a pour coordonnées $(x - a, y - b)$, d'où une équation du cercle : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à une droite (*AB*) au point *A*

- Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Exemple : On considère les points $A(2 ; -6)$ et $B(0 ; 2)$.

On cherche à déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à la droite (AB) au point A. Pour cela, on détermine l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ avec $\overrightarrow{AB}$ (-2 ; 8) et $\overrightarrow{AM}$ $(x - 2 ; y + 6)$, d'où : $-2(x - 2) + 8(y + 6) = 0$

c'est-à-dire : $-x + 4y + 26 = 0$.

IV) Vecteurs dans l'espace (dimension 3)

L'utilisation des vecteurs dans l'espace facilite les travaux sur certaines grandeurs.

1) Coordonnées d'un point dans l'espace

Dans l'espace (dimension 3), les coordonnées du point A sont (x_A, y_A, z_A) dans le repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, d'où :

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

2) Coordonnées d'un vecteur

Soient les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\left(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\right)$$

3) Coordonnées de la somme de deux vecteurs ou du produit d'un vecteur par un nombre réel

Somme de deux vecteurs

Soient les vecteurs $\vec{u}$ $(x; y ; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont :

$$(x + x'; y + y'; z + z').$$

Multiplication d'un vecteur par un réel

Soient le vecteur $\vec{u}$ $(x; y ; z)$ et le nombre réel α. Les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{u}$ sont :

$$(\alpha x;\ \alpha y\ ;\ \alpha z)$$

4) Norme d'un vecteur dans l'espace

Soit un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(X,\ Y,\ Z)$ dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, la norme du vecteur $\vec{u}$ (notée $\left\|\vec{u}\right\|$) est : $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$

V) Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le nombre noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1) Calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

Utiliser l'une des deux expressions suivantes.

Expression géométrique du produit scalaire

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ formant un angle $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre :

$$\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\vec{v}\right)$$

Expression analytique du produit scalaire

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de coordonnées $(x ; y ; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans un repère othonormal, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre: $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Remarque : si l'un au moins des vecteurs est le vecteur nul, alors le produit scalaire est nul.

2) Montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls, sont orthogonaux

- Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

- Si le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est nul, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ($\vec{u}\perp\vec{v}$).

3) Calculer la mesure θ de l'angle $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x ; y ; z)$ et $(x'; y'; z')$

- Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- Utiliser la relation suivante : $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}$
- Déterminer la valeur de l'angle θ en utilisant la calculatrice.