LES FONCTIONS NUMÉRIQUES USUELLES

I) Généralités

1) Définition

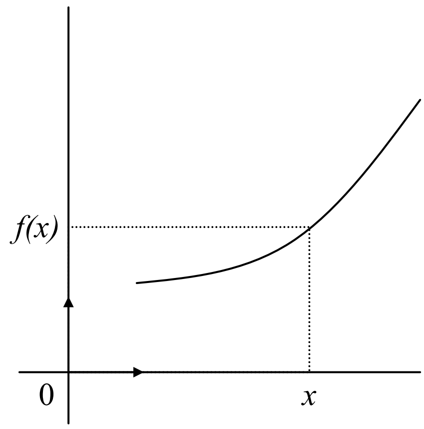
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction est une relation qui associe à tout élément x de I, un nombre réel $f(x)$ au plus.

$$f : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

x est la variable et $f(x)$ est l'image de x. On note $y = f(x)$. L'ensemble des éléments de I ayant une image est appelé ensemble de définition, noté E.

2) Représentation graphique

Dans un plan muni d'un repère, la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées (x ; $f(x)$).
$y = f(x)$ est une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.



3) Sens de variation d'une fonction

Si pour tous nombres x_1 et x_2 d'un intervalle $I = [a ; b]$, tels que $x_1 < x_2$ on a :

- $f(x_1) < f(x_2)$, alors la fonction est croissante sur I (fig 1)
- $f(x_1) > f(x_2)$, alors la fonction est décroissante sur I (fig 2)
- $f(x_1) = f(x_2)$, alors la fonction est constante sur I (fig 3)

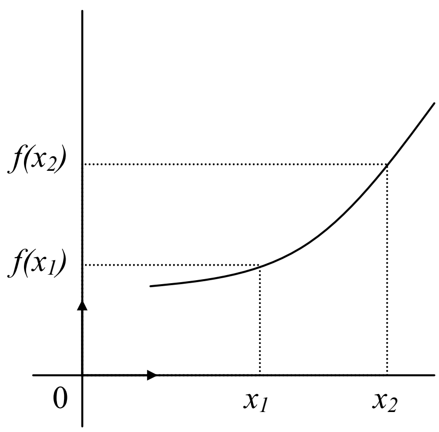


fig 1

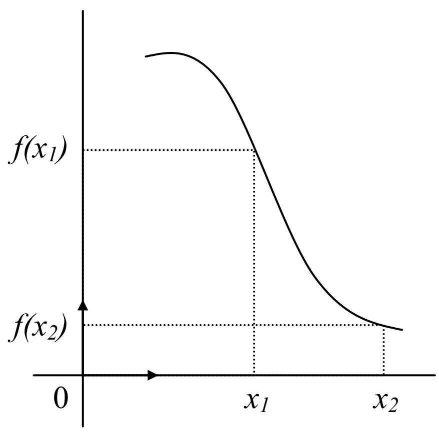


fig 2

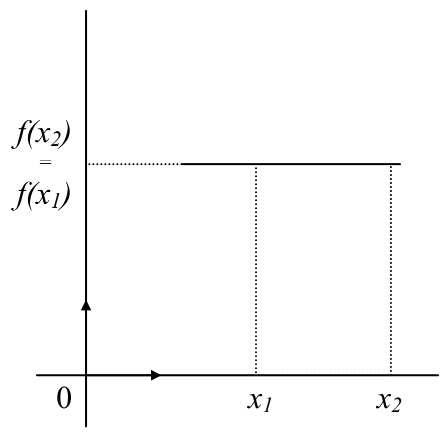


fig 3

Une flèche indique, dans le tableau de variation, le sens de variation de la fonction.

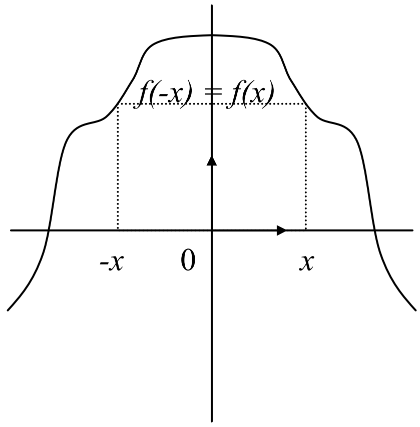
x	a b
Sens de variation de la fonction f	$\nearrow$

Cas d'une fonction croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

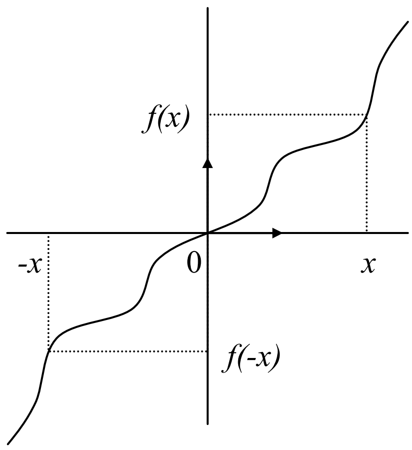
4) Parité

Soit une fonction définie sur un intervalle I tel que si $x \in I$, alors $-x \in I$.

a) f est une fonction paire si pour tout x de I : $f(-x) = f(x)$.
Dans un repère orthonormal, sa courbe représentative présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



b) f est une fonction impaire si pour tout x de I : $f(-x) = - f(x)$.
Dans un repère orthonormal, sa courbe représentative présente une symétrie centrale par rapport à l'origine du repère.



II) Fonction affine

1) Définition

On appelle fonction affine, toute fonction définie par une expression de la forme $f(x) = ax + b$; a et b étant des réels.

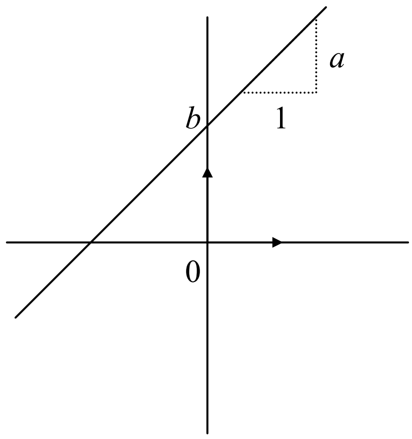
Remarque : Une fonction linéaire ($x \mapsto ax$) est une fonction affine particulière ($b = 0$).

2) Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère cartésien est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

$y = ax + b$ est une équation de la droite représentative.

coefficient directeur ↑ ordonnée à l'origine

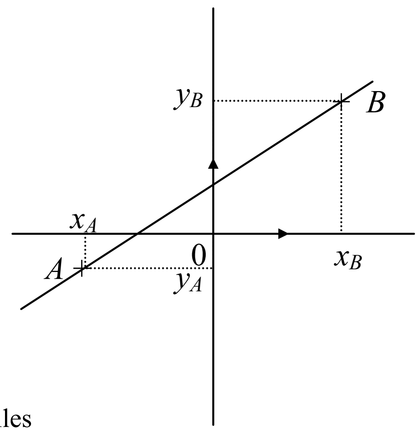


Dans le cas particulier où $a = 0$, la fonction s'écrit $f(x) = b$; f est une fonction constante représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

3) Coefficient directeur

Le coefficient directeur a d'une droite D passant par les points A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) est donné par la relation :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

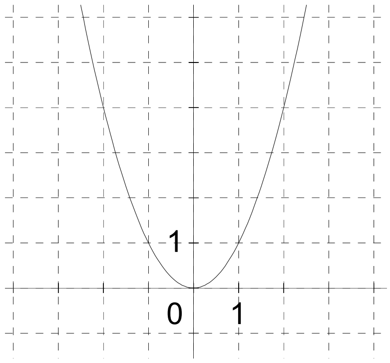


III) Les autres fonctions usuelles

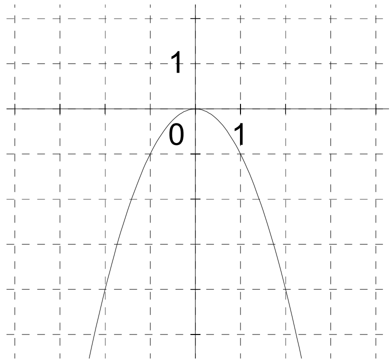
1) fonction $f : x \rightarrow ax^2$

La représentation graphique de f est une parabole.
La fonction f est paire : $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$

cas où $a > 0$



cas où $a < 0$

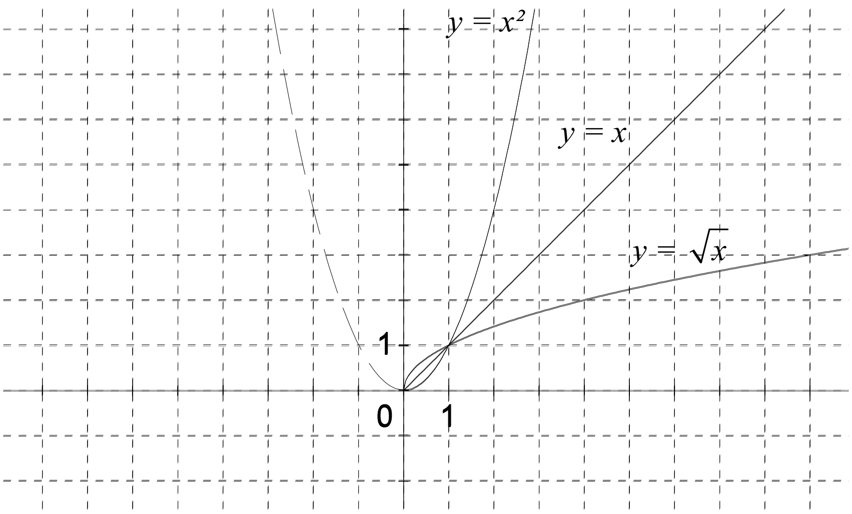


x		0	
f	↘	0	↗

x		0	
f	↗	0	↘

2) fonction « racine carrée » $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Dans un repère orthonormal, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ se déduit de la représentation graphique de la fonction « carrée », $x \mapsto x^2$ par une symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.



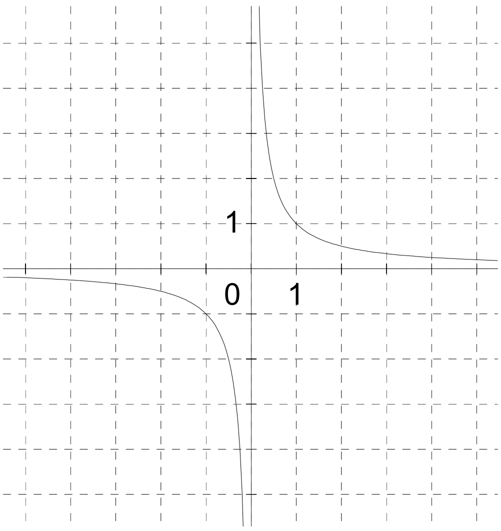
x	0	
f	0	↗

3) fonction $f : x \mapsto \dfrac{a}{x}$

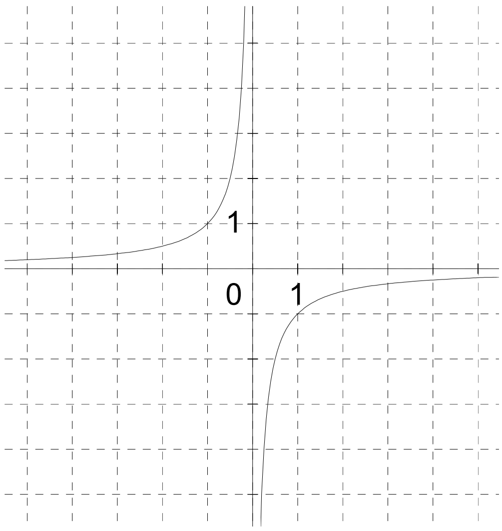
La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{a}{x}$ est une hyperbole. La fonction f est impaire : $f(-x) = \dfrac{a}{-x} = -\dfrac{x}{a} = -f(x)$

L'hyperbole présente une symétrie ayant pour centre l'origine du repère.

cas où $a > 0$



cas où $a < 0$



x		0	
f	↘	‖	↘

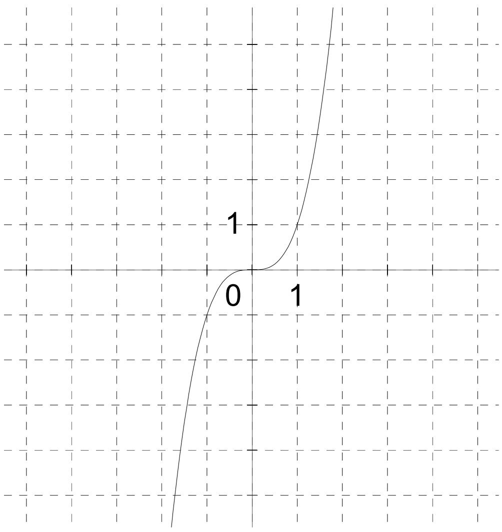
x		0	
f	↗	‖	↗

Pour de grandes valeurs de x ou de y, la courbe « se rapproche » des axes du repère : on dit que les axes sont des asymptotes de la courbes.

4) fonction $f : x \rightarrow x^3$

La fonction $f : x \rightarrow x^3$ est impaire : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

La représentation graphique admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

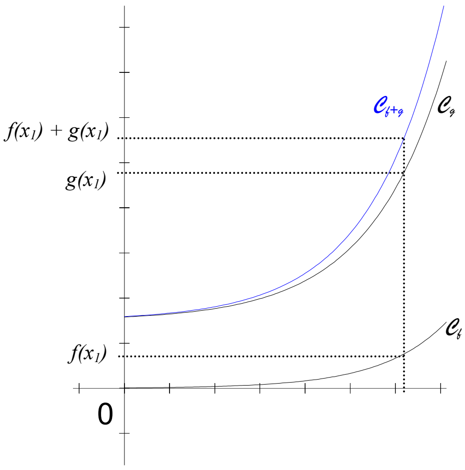


x	0
f	↗

IV) Courbes représentatives et opérations sur les fonctions

1) Représentation graphique de $f + g$

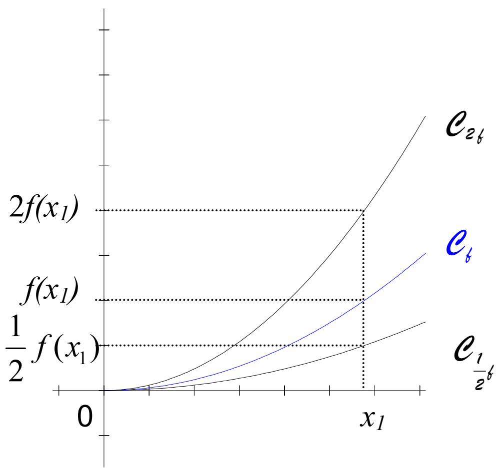
La représentation graphique $\mathcal{C}_{f+g}$ de la fonction $f + g$ est obtenue point par point à partir des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g : pour une abscisse x_1 donnée, l'ordonnée du point de la courbe $\mathcal{C}_{f+g}$ s'obtient en additionnant les ordonnées $f(x_1)$ et $g(x_1)$ des points des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Addition point par point des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

2) Représentation graphique de λf

La représentation graphique $\mathcal{C}_{\lambda f}$ de la fonction λf est obtenue point par point à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$: pour une abscisse x_1 donnée, l'ordonnée du point de la courbe $\mathcal{C}_{\lambda f}$ s'obtient en multipliant l'ordonnée $f(x_1)$ du point de $\mathcal{C}_f$ par λ .

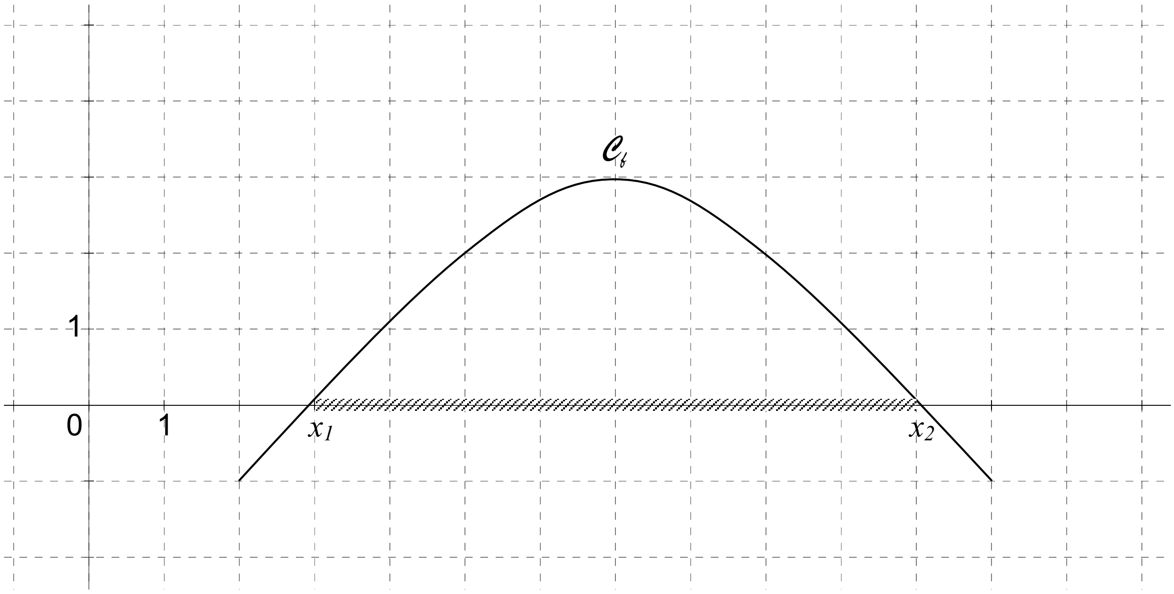


Construction des courbes $\mathcal{C}_{\lambda f}$ pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda = 2$

V) Interprétation graphique de $f \geq 0$ et $f \geq g$

1) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \geq 0$

Soit la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ; soit x_1 et x_2 les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
La lecture du graphique permet d'établir que $f(x) \geq 0$ pour $x_1 \leq x \leq x_2$.



2) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g ; soit x_1 et x_2 les abscisses de leurs points d'intersection.
La lecture du graphique permet d'établir que : $f(x) \geq g(x)$ pour $x_1 \leq x \leq x_2$.