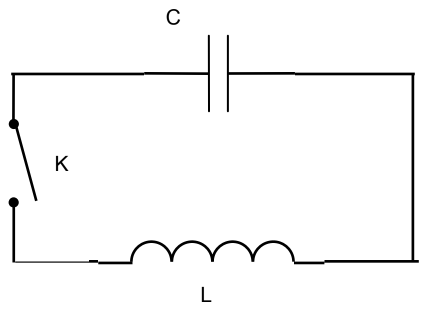
CONTRÔLE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1

Un condensateur de capacité C (en Farad), préalablement chargé, est placé dans un circuit inductif, d'inductance L (en Henry). Les composants sont supposés parfaits. (résistance négligeable)



A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur. Au cours de la décharge du condensateur, sa charge q(t) en coulomb, vérifie à chaque instant t , l'équation différentielle :

$$\mathrm{L}q''(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = 0$$

1) On donne L = 100 mH et C = 10 µF
Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire $q''(t) + 10^6\,q(t) = 0$

2) On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 10^6\,y = 0$ où y est une fonction de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$ et y'' sa fonction dérivée seconde.

a) En utilisant le formulaire, donner la solution générale de l'équation différentielle (E)

b) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0{,}01$.

(*D'après sujet de Bac Pro EIE Session 2005*)

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y''+y=0$

où y est une fonction de la variable x, définie sur $\mathbb{R}$ et y'' sa fonction dérivée seconde.

1) En utilisant le formulaire, donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

2) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) telle que :

$$y(0)=0 \quad \text{et} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

On rappelle : $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(*D'après sujet de Bac Pro Équipements et installations électriques Session 2001*)

Exercice 3

Un système de régulation de température dans un atelier est constitué de plusieurs climatiseurs industriels.
Un programmateur commande ce système de régulation.
Deux paramètres doivent être entrés dans les données du programmateur : la température initiale K et le coefficient d'atténuation a.
Lors de la mise en route, la régulation peut être modélisée par une équation différentielle de la forme : $y' + ay = 0$.

L'expression de la solution générale de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est $y(t) = K\,\mathrm{e}^{a\,t}$ où K désigne la température initiale de l'atelier (en °C) , a est le coefficient d'atténuation et t le temps exprimé en minutes.

1) À de partir de $y(t) = K\,\mathrm{e}^{a\,t}$ exprimer $y'(t)$.

2) Déterminer les valeurs de K et a qui correspondent aux conditions initiales :

$$y(0) = 45 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = -2{,}25.$$

(*D'après sujet de Bac Pro Énergétique Session juin 2006*)