CONTRÔLE SUR L'ÉTUDE DE FONCTIONS DÉRIVÉES

Pour éviter toute pollution des nappes phréatiques, les éleveurs porcins doivent désormais stocker leur lisier dans des bassins avant épandage sur les terres comme engrais.

Bassin de stockage

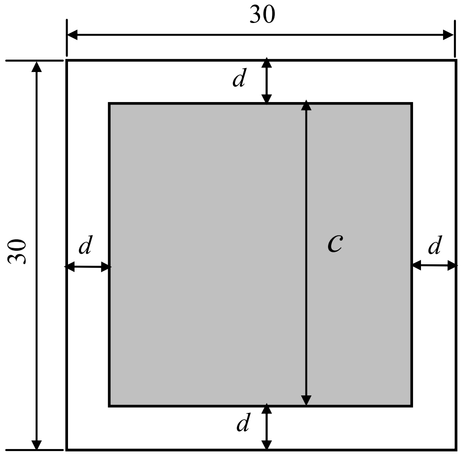
Epandage du lisier

Un éleveur fait appel à une société de travaux publics pour creuser un bassin au centre d'une parcelle de forme carrée. La mesure d'un côté de la parcelle est de 30 mètres.

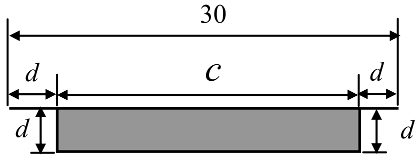
Les conditions d'implantation du bassin dans la parcelle font que :

- une distance de sécurité d, en m, doit être instaurée autour du bassin ;
- la profondeur du bassin est égale à la distance de sécurité d ;
- la distance de sécurité d doit être au moins égale à 2 m,
- la profondeur du bassin d ne peut dépasser 8 m.

Ce qui se traduit par : $2 \leq d \leq 8$.



Vue de dessus du bassin



Vue en coupe du bassin

Le but du problème est de déterminer la valeur d pour que le volume du bassin soit maximal sur la parcelle considérée.

Partie A :

Détermination du volume du bassin en fonction de *d* :

1) Cas particulier : Y

Calculer, en m, la mesure c_0 du côté du bassin pour une distance de sécurité d_0 égale à 3 m. En déduire le volume V_0, en m^3, du bassin.

2) Cas général :

a) Soit c la mesure en mètre du côté du bassin et d la distance de sécurité en mètre autour de ce dernier. Exprimer c en fonction de d.

b) Montrer que l'aire S en mètre-carré du bassin s'exprime par :

$$S = 4d^2 - 120d + 900 .$$

c) En déduire que le volume V en m^3, du bassin s'exprime par :

$$V = 4d^3 - 120d^2 + 900d .$$

Partie B :

Modélisation mathématique :

Soit f la fonction définie pour tout x de l'intervalle [2 ; 8] par :

$$f(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x .$$

1) Compléter le tableau de valeurs.

x	2	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8
valeur de $f(x)$ arrondie à l'unité	1 352		1 936		2 000		1 944		1 568

2) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que : $f'(x) = 12x^2 - 240x + 900$.

3) Résoudre l'équation : $f'(x) = 0$ pour x appartenant à l'intervalle [2 ; 8].

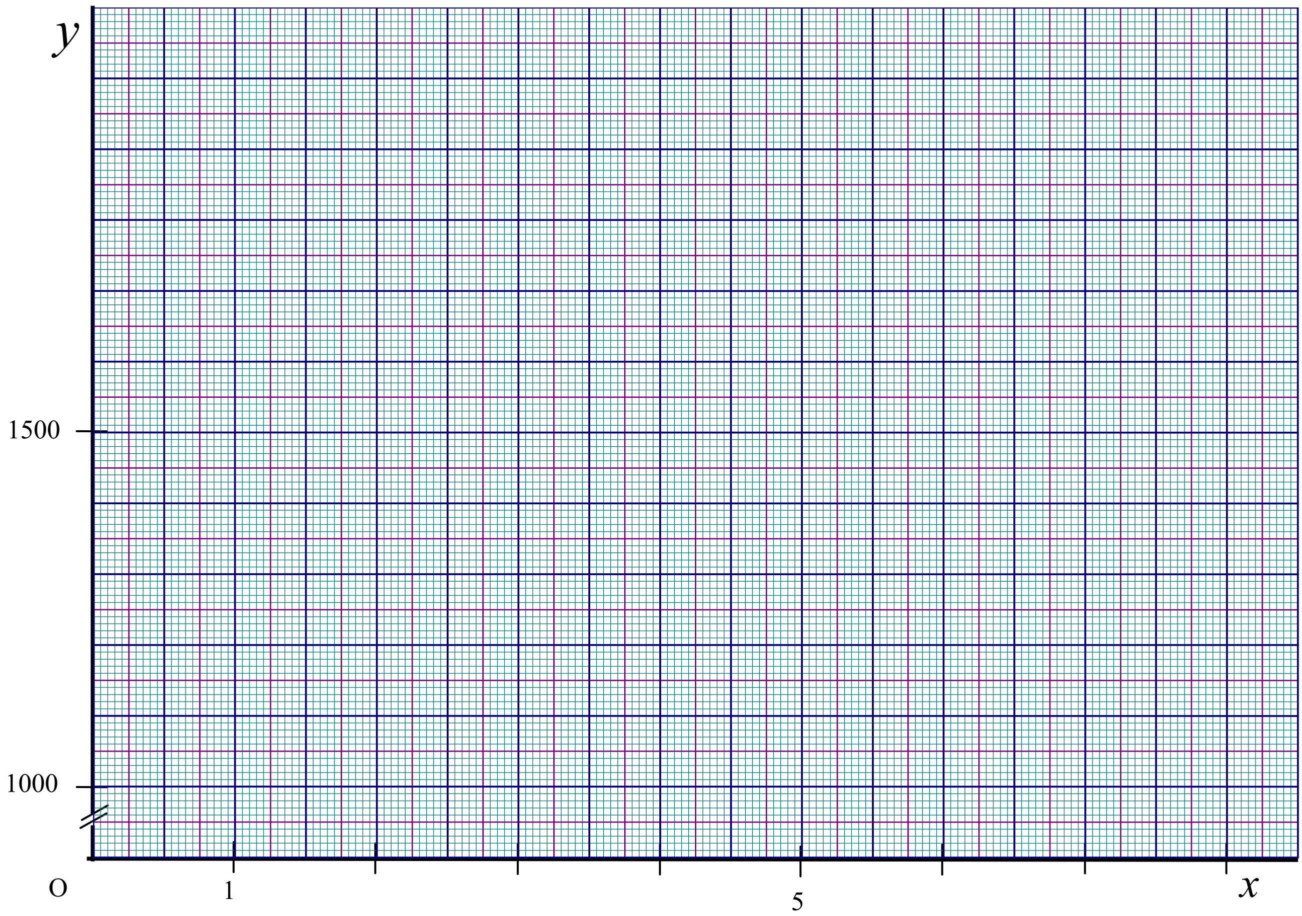
4) Calculer $f'(6)$.

5) On admet que, pour tout x de l'intervalle]5 ; 8], le signe de $f'(x)$ est celui de $f'(6)$.

Compléter le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 8].

x	2	…..	8
Signe de $f'(x)$	+	0	
Variation de la fonction f			

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté au repère d'axes (Ox, Oy).



6) Tracer dans le plan rapporté au repère (Ox, Oy) :

a) la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x = 5$.

b) la courbe C_f représentative de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 8].

7) Déterminer les coordonnées de l'extremum de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 8].

Partie C :

Exploitation de l'étude mathématique :

La fonction f modélise la variation du volume V du bassin en fonction de la valeur d représentant à la fois la profondeur du bassin et la distance de sécurité autour de ce dernier.

1) Donner la valeur de d, en mètre, qui correspond au volume maximal du bassin.

2) Donner la valeur V, en mètre cube, du volume correspondant du bassin.

(*D'après sujet Bac Pro maintenance des matériels A, B et C Session 2004*)